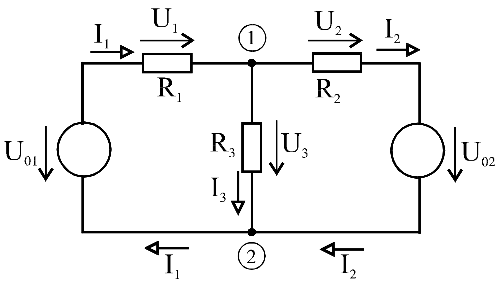
2.3. Univerzální metody

Univerzálními metodami rozumíme metody řešení elektrických obvodů, které dovolují analyzovat obvody libovolné složitosti. Jejich větší možnosti jsou však zaplaceny tím, že při řešení nevystačíme se základními početními operacemi, ale musíme řešit soustavu (lineárních) rovnic pro více neznámých veličin. V této kapitole uvedeme nejčastěji využívané metody a to

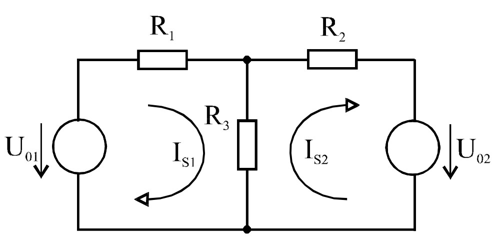
1. Metodu přímé aplikace Kirchhoffových zákonů
2. Metodu smyčkových proudů
3. Metodu uzlových napětí
4. Modifikovanou metodu uzlových napětí

2.3.1. Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů

Uvažujme obvod na obr.2.13. Obvod obsahuje tři rezistory a dva zdroje napětí. Cílem analýzy je určení všech neznámých, tj. tří proudů a tří napětí v obvodu. Máme tedy celkem šest obvodových veličin, pro které musíme formulovat šest nezávislých rovnic.



Obr.2.13



Obr.2.14

Obvod má dva uzly. Můžeme pro ně formulovat dvě rovnice, ty jsou však vzájemně lineárně závislé:
Rovnice 1.KZ pro uzel 1 :

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0\,, \qquad (2-9)$$

rovnice pro uzel 2 :

$$+I_1 - I_2 - I_3 = 0\,. \qquad (2-10)$$

Je zřejmé, že druhá rovnice nepřináší žádnou novou informaci, je lineárně závislá na první rovnici. Proto můžeme pro další výpočty použít pouze jedné z rovnic. Ukazuje se obecně, že pro obvod s celkovým počtem ***n*** uzlů můžeme formulovat pouze ***n-1*** rovnici. Je to dáno tím, že obvod jako celek tvoří uzavřenou soustavu, takže součet všech proudů v obvodu musí být roven nule.
Další rovnice vycházejí z 2. Kirchhoffova zákona aplikovaného na nezávislé smyčky v obvodu. V uvedeném obvodu jsou dvě nezávislé smyčky a platí pro ně :

$$-U_{01} + U_1 + U_3 = 0\,, \qquad (2-11)$$

$$-U_3 + U_2 + U_{02} = 0\,. \qquad (2-12)$$

(Pro třetí možnou smyčku bychom dostali $-U_{01} + U_1 + U_2 + U_{02} = 0$, tato rovnice je však opět lineárně závislá na prvních dvou a proto pro další výpočet nepoužitelná.)

Pomocí Ohmova zákona formulujeme konečně tři zbývající rovnice a to

$$U_1 = R_1.I_1,\;\; U_2 = R_2.I_2,\;\; U_3 = R_3.I_3 \;\; . \qquad (\,2-13\,),\,(\,2-14\,),\,(\,2-15\,)$$

Dostali jsme tak šest rovnic pro šest neznámých, které musíme řešit současně. Rovnice můžeme zapsat v maticovém tvaru :

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & & & \\ & & & +1 & & +1 \\ & & & & +1 & -1 \\ R_1 & & & -1 & & \\ & R_2 & & & -1 & \\ & & R_3 & & & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +U_{01} \\ -U_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\,2-16\,)$$

Jde sice o tzv. řídké rovnice (v matici je většina prvků rovna nule), ale jejich počet je příliš vysoký i u takto jednoduchého obvodu. Ruční řešení např. výpočtem determinantů a algebraických doplňků matice soustavy nepřichází samozřejmě v úvahu.
Problém, jak počet nezávislých rovnic snížit, řeší metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí. V obou případech probíhá analýza obvodu ve třech krocích :

1. Vybereme nejmenší možný počet vzájemně nezávislých obvodových veličin (smyčkových proudů resp. uzlových napětí) .
2. Formulujeme a řešíme soustavu rovnic pro tyto nezávislé veličiny .
3. Z těchto veličin vypočítáme hodnoty všech zbývajících napětí a proudů v obvodu. Tento výpočet je již velmi jednoduchý a vystačí se základními početními operacemi.

2.3.2. Metoda smyčkových proudů

Metoda smyčkových proudů vychází z představy, že jednotlivými **nezávislými smyčkami** obvodu protékají nezávislé proudy. Ve větvích, které jsou společné, teče pak proud, daný superpozicí (součtem nebo rozdílem) příslušných smyčkových proudů.
Postup ukážeme opět na obvodu, jehož schéma je na obr.2.13. V obvodu jsou, jak jsme již poznali, dvě nezávislé smyčky. Označíme smyčkové proudy I_{S1} a I_{S2} a jejich orientaci např. tak, jak to ukazuje obr.2.14. Rovnice 2. Kirchhoffova zákona píšeme tak, že sečítáme napětí ve směru, daném orientací příslušného smyčkového proudu.
Pro první smyčku platí

$$-U_{01} + R_1.I_{S1} + R_3(I_{S1} - I_{S2}) = 0\,, \qquad (\,2-17\,)$$

pro druhou smyčku

$$R_3.(I_{S2} - I_{S1}) + R_2.I_{S2} + U_{02} = 0\,. \qquad (\,2-18\,)$$

Rovnice můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix} \quad . \qquad (\,2-19\,)$$

Místo šesti rovnic máme nyní pouze dvě a proto je jejich řešení velmi snadné i pomocí determinantů. Determinant soustavy

$$\Delta = R_1.R_2 + R_2.R_3 + R_3.R_1 \qquad (\,2-20\,)$$

a smyčkové proudy

$$I_{s1} = \frac{U_{01}.(R_2 + R_3)}{\Delta}, \quad I_{s2} = \frac{-U_{02}.R_3}{\Delta}. \qquad (2-21), (2-22)$$

Proudy větví a napětí na jednotlivých prvcích podle označení na obr.2.13 pak budou

$$I_1 = I_{s1}, \; I_2 = I_{s2}, \; I_3 = I_{s1} - I_{s2}, \; U_1 = R_1.I_1, \; U_2 = R_2.I_2, \; U_3 = R_3.I_3.$$

Rovnice pro smyčkové proudy lze psát jako

$$\mathbf{Z}.\mathbf{I} = \mathbf{E} \quad , \qquad (2-23)$$

kde

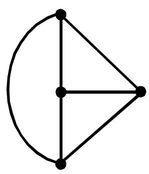
Z je matice soustavy (tzv. odporová resp. impedanční matice)
I je vektor neznámých smyčkových proudů
E je vektor pravých stran rovnic, obsahující napětí nezávislých zdrojů.

Základním problémem při aplikaci metody smyčkových proudů je volba nezávislých smyček. Jejich počet určíme pomocí vztahu

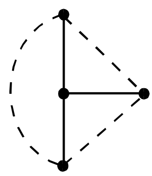
s=v-n+1,

kde *v* je počet větví v obvodu a *n* je celkový počet uzlů.
(V příkladu, který jsme řešili, bylo *v=3, n=2* a tedy *s=3-2+1=2* nezávislé smyčky.)

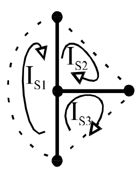
Nezávislé smyčky volíme nejlépe na základě **grafu obvodu**. Graf znázorňuje jednotlivé uzly jako body a jejich propojení větvemi, představovanými spojnicemi uzlů. Příkladem může být např. graf můstku, jehož elektrické schéma je na obr.2.7. Graf je zobrazen na obr.2.15a.
Z grafu odebereme některé větve tak, abychom dostali tzv. **strom**. Strom je soustava větví, které vzájemně propojují všechny uzly obvodu, ale nikde netvoří uzavřené smyčky. Jednu možnou volbu stromu ukazuje obr.2.15b. Plnými čarami jsou nakresleny větve stromu, čárkovaně pak větve odebrané, tzv. **hlavní větve**.



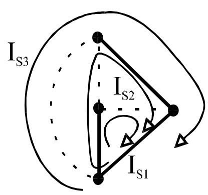
Obr.2.15a



Obr.2.15b



Obr.2.16a



Obr.2.16b

Hlavními větvemi jsou určeny nezávislé smyčky. Každou hlavní větví protéká právě jeden nezávislý smyčkový proud. Na obr.2.16a jsou zvoleny smyčkové proudy odpovídající hlavním větvím na obr.2.15b. Všechny jsou orientovány shodně, ve směru hodinových ruček. I když je to nejčastější způsob, není zdaleka jediný možný; každý z proudů by mohl být orientován obráceně.
Na obr.2.16b je uveden příklad jiné možné volby smyček a smyčkových proudů u stejného obvodu.
Impedanční (odporovou) matici obvodu můžeme sestavit přímo na základě schématu a volby smyčkových proudů, aniž bychom psali rovnice 2. Kirchhoffova zákona, tímto postupem :
1. Smyčkovým proudům přiřadíme indexy 1, 2, ..., s.

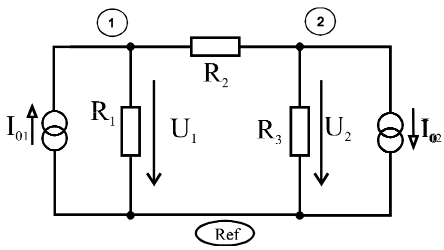
2. Připravíme tabulky pro čtvercovou matici soustavy (bude mít *s* řádků a *s* sloupců), vektor neznámých proudů a vektor pravých stran. Do vektoru neznámých vepíšeme symboly smyčkových proudů I_{s1}, I_{S2}, ..., I_{ss}.
3. Sestavíme matici soustavy.
   Prvek z_{ii} na hlavní diagonále (tj. prvek v *i-tém* sloupci *i-tého* řádku) je roven součtu odporů v *i-té* smyčce. Je vždy kladný.
   Prvek $z_{ij}=z_{ji}$ mimo hlavní diagonálu (prvek v *j-tém* sloupci *i-tého* řádku a stejně i prvek v *i-tém* sloupci *j-tého* řádku) jsou rovny součtu odporů, které jsou společné *i-té* a *j-té* smyčce (protékají jimi oba proudy současně). Znaménko je kladné, tekou-li oba proudy shodnými směry, záporné, tekou-li každý jiným směrem.
4. Sestavíme vektor pravých stran rovnic
   Prvek e_i v *i-tém* řádku je roven součtu napětí nezávislých zdrojů, působících v *i-té* smyčce. Napětí se bere kladně, je-li orientováno proti směru proudu smyčky, záporně, je-li orientace shodná s orientací smyčkového proudu.

Závěrem lze o metodě smyčkových proudů říci, že je vhodná pro ruční řešení jednodušších obvodů a to zvláště obvodů obsahujících magneticky vázané cívky (obvody s transformátory, elektrickými točivými stroji apod.). Naprosto se nehodí pro řešení složitějších elektronických obvodů s tranzistory nebo integrovanými obvody. Protože volba nezávislých smyček dává příliš mnoho možností, je metoda smyčkových proudů obtížně použitelná k realizaci programů pro analýzu obvodů počítačem.

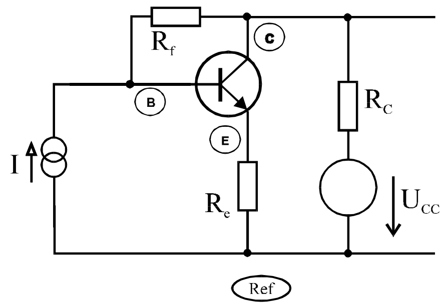
2.3.3. Metoda uzlových napětí

Řešení obvodu na základě metody uzlových napětí probíhá opět ve třech krocích :

1. Vybereme jeden z uzlů obvodu a prohlásíme jej za tzv. **referenční uzel**. Jeho potenciál pokládáme za rovný nule. Očíslujeme ostatní, tzv. nezávislé uzly a označíme v kladném smyslu jejich napětí vzhledem k referenčnímu uzlu (tzv. **uzlová napětí**) jako U_1, U_2, ... U_{n-1}.
2. Pro jednotlivé **nezávislé uzly** formulujeme rovnice 1. Kirchhoffova zákona. Proudy
   tekoucí z uzlu bereme s kladným znaménkem, proudy tekoucí do uzlu se záporným



Obr.2.17



Obr.2.18

znaménkem. Řešením soustavy rovnic obdržíme velikosti uzlových napětí v obvodu.
3. Vypočítáme proudy a napětí na jednotlivých prvcích obvodu.

Metoda uzlových napětí vyžaduje, aby zdroje v obvodu (nezávislé i řízené) byly **výhradně zdroje proudu**. Případné zdroje napětí nahradíme (pokud je to možné) ekvivalentními zdroji proudu.

Příklad 2.12

Obvod na obr.2.17 má celkem tři uzly. Uzel na spodním okraji schématu označíme jako referenční, nezávislým uzlům přidělíme pořadová čísla 1 a 2. Uzlová napětí označíme jako U_1 a U_2. Rovnice 1. Kirchhoffova zákona pro uzel 1 pak zní

$$\frac{1}{R_1}U_1+\frac{1}{R_2}(U_1-U_2)-I_{01}=0\,, \qquad (2-24)$$

rovnice 2. uzlu

$$\frac{1}{R_2}(U_2-U_1)+\frac{1}{R_3}U_2+I_{02}=0\,. \qquad (2-25)$$

V maticové formě

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \end{bmatrix}, \qquad (2-26)$$

tj.

$$\mathbf{YU}=\mathbf{J}\,, \qquad (2-27)$$

kde

Y je matice vodivostí (tzv. admitanční matice obvodu),
U je vektor neznámých uzlových napětí,
J je vektor pravých stran (nezávislých zdrojů proudu).

Místo převrácených hodnot odporů jsme v matici použili vodivostí.

Řešením soustavy rovnic dostaneme uzlová napětí

$$U_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{I_{01}(G_2+G_3)-I_{02}G_2}{G_1G_2+G_2G_3+G_3G_1}\,, \qquad U_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{I_{01}G_2-I_{02}(G_1+G_2)}{G_1G_2+G_2G_3+G_3G_1}\,.$$

(V uvedených vztazích je opět Δ determinant soustavy, Δ_1 a Δ_2 jsou subdeterminanty, které vzniknou z matice soustavy a to Δ_1 po záměně prvního , Δ_2 po záměně druhého sloupce matice soustavy za sloupec vektoru pravých stran.)
Proudy jednotlivými rezistory pak jsou

$$I_{R_1}=\frac{U_1}{R_1}=U_1G_1,\quad I_{R_2}=\frac{U_1-U_2}{R_2}=(U_1-U_2)G_2,\quad I_{R_3}=\frac{U_2}{R_3}=U_2G_3\ .$$

Při praktickém použití metody uzlových napětí rovnice formulujeme na základě schématu obvodu přímo v maticové formě. Připravíme čtvercovou admitanční matici, jejíž řád je roven počtu neznámých uzlových napětí, tj. počtu uzlů v obvodu zmenšenému o jedničku. Do sloupcové matice vektoru neznámých ihned napíšeme symboly uzlových napětí.

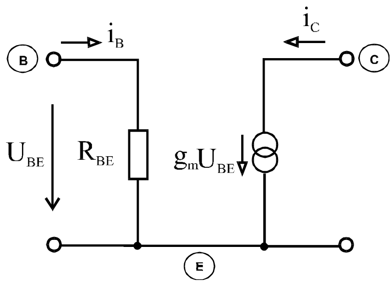
Admitační matici sestavujeme tak, že nejprve píšeme prvky na hlavní diagonále. Prvek y_{ii} v ***i***-tém řádku a sloupci je roven součtu vodivostí, připojených k ***i***-tému uzlu. Je vždy kladný.

Prvky mimo hlavní diagonálu $y_{ij}=y_{ji}$ jsou vždy záporné a jsou rovny záporně vzatému součtu vodivostí mezi uzly *i* a *j*. Admitační matice reciprocitních obvodů je souměrná podle hlavní diagonály.

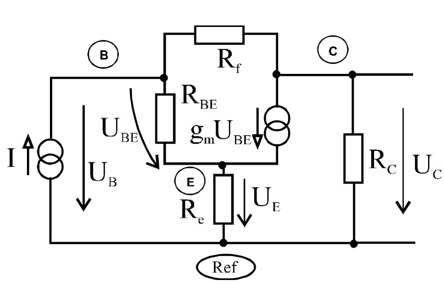
Prvek e_i ve vektoru pravých stran je roven součtu proudů nezávislých zdrojů, které tekou do uzlu *i*. Pozor !- Proudy, které z uzlu vytékají, se zde píší se záporným znaménkem. Zdroje proudu totiž změní převodem na druhou stranu rovnic znaménko – viz vztah (2–24), (2 – 25).

Příklad 2.13

Na obr.2.18 je nakresleno schéma jednoduchého tranzistorového zesilovacího stupně se zpětnou vazbou. Bipolární tranzistor NPN má tři elektrody - bázi, kolektor a emitor. Signál ze zdroje proudu *I* je přiveden na bázi, zesílený signál je odváděn z kolektoru. Pro správnou činnost je nutno tranzistoru nastavit vhodný pracovní bod. To zajišt´uje zvláštní zdroj stejnosměrného napětí U_{CC},. (Napětí tohoto zdroje bývá několik voltů).



Obr.2.19a



Obr.2.19b

Předpokládáme, že zesilovač zpracovává velmi malý signál, řádově několik milivoltů nebo desítek milivoltů. V tom případě můžeme provést tzv. linearizaci charakteristik tranzistoru a zaměnit ho pro účely analýzy obvodu náhradním zapojením. Často stačí použít jednoduché náhradní schéma, které je nakresleno na obr.2.19a. Schéma má tři uzly stejně jako tranzistor. Mezi bází a emitorem je zapojen rezistor R_{BE}. Proud báze je roven podílu napětí U_{BE} mezi bází a emitorem a odporu R_{BE}. Proud kolektoru je pak roven proudu báze násobenému proudovým zesilovacím činitelem *b*, tj.

$$I_C = b\, i_B = \frac{b}{R_{BE}} U_{BE} = g_m U_{BE}\ . \qquad (2-28)$$

To je ve schématu respektováno zdrojem proudu řízeným napětím. Parametr tohoto řízeného zdroje $g_m = b / R_{BE}$ je strmost tranzistoru.

Upravené schéma obvodu, které budeme řešit, je na obr.2.19b. Tranzistor je nahrazen popsaným náhradním schématem. Místo zdroje stejnosměrného napájecího napětí je ve schématu zkrat, protože napětí U_{cc} má vliv pouze na polohu pracovního bodu tranzistoru (a tím na velikosti parametrů R_{BE} a g_m), ale jinak neovlivňuje průchod zesilovaného signálu obvodem.

Protože zatím nevíme, jak sestavit admitanční matici, vyjdeme z rovnic 1. Kirchhoffova zákona.

uzel B: $$G_{BE}(U_B - U_E) + G_f(U_B - U_C) = I\,, \qquad (2-29)$$

uzel C: $$G_f(U_C - U_B) + g_m(U_B - U_E) + G_c U_C = 0\,, \qquad (2-30)$$

uzel E: $$G_{BE}(U_E - U_B) - g_m(U_B - U_E) + G_e U_E = 0\,. \qquad (2-31)$$

Z rovnic zapsaných v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} G_{BE} + G_f & -G_f & -G_{BE} \\ -G_f + g_m & G_f + G_c & -g_m \\ -G_{BE} - g_m & 0 & G_{BE} + G_e + g_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2-32)$$

je vidět několik zajímavých skutečností:

1. Parametr g_m řízeného zdroje se objeví v admitanční matici, a ne na pravých stranách. Na pravých stranách jsou vždy jen proudy nezávislých zdrojů.
2. Admitanční matice není souměrná podle hlavní diagonály. Jak poznáme později, znamená to, že obvod není reciprocitní.

Abychom mohli sestavovat admitační matici obvodu přímo ze schématu i v případě, že obvod obsahuje řízené zdroje, je vhodné definovat tzv. **razítkové matice** jednotlivých obvodových prvků.

Poznali jsme již, že vodivost *G* rezistoru zapojeného mezi uzly *i* a *j* se objeví v admitační matici celkem čtyřikrát a to s kladným znaménkem v prvcích matice y_{ii} a y_{jj} a se záporným znaménkem v prvcích y_{ij} a y_{ji}. Můžeme si to představit jako otisk „razítka“ rezistoru (ve tvaru čtvercové matice) v řádcích a sloupcích *i* , *j* .

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} i & \;\; j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} +G & -G \\ -G & +G \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (2-33)$$

Každý rezistor má svoje „ razítko“ s konkrétními indexy řádků a sloupců, odpovídajícími označení uzlů, ke kterým je rezistor připojen. Vodivost *G* (s příslušným znaménkem) bude přičtena k prvkům matice, které leží na průsečíku řádku a sloupce s odpovídajícími indexy. Je-li rezistor zapojen mezi uzel *i* a referenční uzel, vodivost *G* se objeví v matici pouze jedenkrát a to v prvku y_{ii}, protože v matici řádek ani sloupec odpovídající referenčnímu uzlu není.
Podobně můžeme sestavit i razítko pro zdroj proudu řízený napětím. Jsou-li řídicí uzly zdroje (vstup) např. *a* a *b*, výstupní uzly *c* a *d*, má razítko tvar

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} +g_m & -g_m \\ -g_m & +g_m \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2-34)$$

Při použití „razítek“ obvodových prvků sestavujeme matici tak, že bereme postupně jednotlivé obvodové prvky a vkládáme jejich popis do výsledné admitační matice. To je také nejjednodušší postup, použitelný při automatizované formulaci rovnic počítačovým programem. Program vybírá obvodové prvky z popisu schématu řešeného obvodu a sestavuje matici soustavy.

Výpočet vstupního odporu obvodu a činitele přenosu

Často potřebujeme vypočítat vstupní odpor obvodu, tj. odpor, který naměříme mezi dvěma jeho uzly, např. mezi uzly, ke kterým je připojen zdroj vstupního signálu. Při výpočtu předpokládáme, že v obvodu žádné další nezávislé zdroje nejsou. Obvod však může obsahovat závislé zdroje napětí i proudu.

Dále nás často zajímá, jak obvod zpracovává vstupní signál a jak jej přenáší na výstupní svorky. To je obvykle charakterizováno činitelem přenosu napětí, tj. poměrem výstupního napětí k napětí na vstupu.

K výpočtu obou veličin použijeme metodu uzlových napětí. Uzly obvodu očíslujeme tak, že „živé“ vstupní svorce přidělíme pořadové číslo 1 a „mrtvou“ svorku zvolíme za referenční uzel. „Živou“ výstupní svorku označíme pořadovým číslem 2. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že vstup i výstup mají jednu (tj. „mrtvou“) svorku společnou.
Uvažujeme, že jsme do uzlu 1 přivedli proud I_1 z nezávislého proudového zdroje. Ten se objeví jako jediný nenulový prvek v prvním řádku vektoru $\mathbf{J}$ pravých stran. Řešením obvodu vypočítáme vstupní napětí U_1 a výstupní napětí U_2

$$U_1 = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} I_1, \quad U_2 = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta} I_1. \qquad (2-35), (2-36)$$

V těchto výrazech je

Δ je determinant admitanční matice $\mathbf{Y}$.

$\Delta_{1:1}$ je determinant matice, která z původní admitanční matice $\mathbf{Y}$ vznikne po vynechání 1. řádku a 1. sloupce,

$\Delta_{1:2}$ je (záporně vzatý) determinant matice, která z původní matice vznikne po vynechání 1. řádku a 2. sloupce.

Ze vztahu (2 – 35) pak pro vstupní odpor vyplývá :

$$R_{vst} = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta}. \qquad (2-37)$$

Činitel přenosu napětí Ku určíme ze vztahů (2 – 35) a (2 – 36) jako poměr U_2/U_1 :

$$K_u = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:1}}. \qquad (2-38)$$

Příklad 2.14.

Vypočítáme vstupní odpor a přenos napětí tranzistorového zesilovacího stupně, jehož schéma je na obr.2.18. Vstup obvodu je mezi bází tranzistoru a referenčním uzlem, výstup mezi kolektorem a referenčním uzlem. Numerické hodnoty parametrů jsou R_{be}*=5 kW,* R_e*=200 W,* R_c*=2 kW,* R_f*=50 kW,* g_m*=40 mS.* V souladu s tím, co bylo uvedeno, přidělíme bázi pořadové číslo 1 a kolektoru pořadové číslo 2. Pak bude admitanční matice (hodnoty jsou v milisiemensech)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{array} \\ \underline{Y} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}22 & -0{,}02 & -0{,}2 \\ 39{,}98 & 0{,}52 & -40 \\ -40{,}2 & 0 & 45{,}2 \end{bmatrix}, \end{array}$$

vstupní odpor

$$R_{vst} = \frac{\Delta_{1:1}}{\Delta} = 4{,}72727 k\Omega,$$

přenos napětí

$$K_u = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta_{1:1}} = -8{,}4707 \ .$$

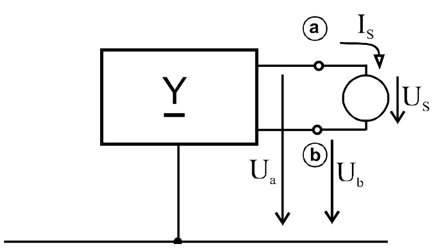
Závěry k metodě uzlových napětí:

1. Metoda je vhodná pro ruční i počítačové řešení jednoduchých i velmi složitých obvodů.
2. Umožňuje řešit i obvody se zdroji proudu řízenými napětím, které jsou obsaženy ve většině náhradních schémat bipolárních i unipolárních tranzistorů (admitanční matice však v tomto případě není symetrická podle hlavní diagonály).
3. Metoda má však i nevýhody; neřeší totiž obvody s některými obvodovými prvky, jmenovitě:
   a. s ideálními zdroji napětí (nezávislými i řízenými),
   b. s operačními zesilovači,
   c. s magneticky vázanými cívkami.

Uvedené nevýhody odstraňuje modifikovaná (upravená) metoda uzlových napětí.

2.3.4. Modifikovaná metoda uzlových napětí

Modifikovaná metoda uzlových napětí vychází z klasické metody uzlových napětí, tj. vektor neznámých veličin obsahuje především uzlová napětí, orientovaná od jednotlivých nezávislých uzlů k referenčnímu uzlu. Vektor neznámých veličin je však rozšířen o některé proudy, jmenovitě o proudy ideálních zdrojů napětí (nezávislých i řízených), vstupní proudy zdrojů řízených proudem, výstupní proudy ideálních operačních zesilovačů a, jak uvidíme v další kapitole, o proudy cívek, zvláště cívek se vzájemnou vazbou.



Na obr.2.20 je nakresleno schéma soustavy, napájené ideálním zdrojem napětí. Zdroj byl z obvodu vyjmut a na obrázku je naznačeno, že je ke zbytku obvodu v levé části obrázku připojen v uzlech *a* a *b*. Zbytek obvodu je popsán klasickými rovnicemi pro uzlová napětí a má admitanční matici $\mathbf{Y}$. Bez přidaného zdroje napětí U_s mají rovnice tvar

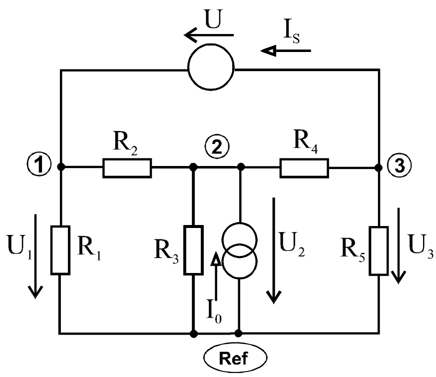
$$\mathbf{YU} = \mathbf{J} \quad . \qquad (2-39)$$

Vektor **U** obsahuje uzlová napětí obvodu včetně obou napětí U_a a U_b.
Proud přidaného zdroje I_s bude novou, poslední položkou ve vektoru neznámých veličin. Proud vytéká z uzlu *a* a vtéká do uzlu *b*. Proto při formulaci rovnic 1. Kirchhoffova zákona proud I_s přičteme k levé straně rovnice pro uzel *a* a odečteme od levé strany rovnice uzlu *b*. Rovnice dále doplníme vztahem

$$U_a - U_b = U_s \, , \qquad (2-40)$$

který odráží to, že rozdíl napětí mezi oběma uzly je určen napětím přidaného zdroje.
V případě, že zdroj má nenulový vnitřní odpor R_s, je možno tento odpor respektovat a přitom zachovat počet rovnic. Rozdíl napětí mezi uzly *a* a *b* je pak zvětšen o úbytek na vnitřním odporu zdroje. Po převedení tohoto úbytku na levou stranu rovnice můžeme psát

$$U_a - U_b - R_s . I_s = U_s \, . \qquad (2-41)$$



Obr.2.21

V maticovém tvaru pak výsledné rovnice vypadají takto:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} a & b & I_s \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ I_s \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} & & +1 \\ & & -1 \\ \hline +1 & -1 & -R_s \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} U_a \\ U_b \\ \hline I_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \hline U_s \end{array}\right] \end{array} \qquad (2-42)$$

Slabými čarami jsou v matici odděleny čtyři submatice. V levém horním rohu je čtvercová admitanční matice regulární části obvodu (tj. té části, která má admitanční matici a může být tudíž popsána klasickou metodou uzlových napětí). Prvky této matice jsou vodivosti. V pravém dolním rohu je naopak čtvercová matice odporů (impedanční matice) zdrojů napětí. Obě zbývající submatice jsou obecně obdélníkové a bezrozměrné.

Násobíme-li matici vektorem neznámých, pak jedničky v posledním sloupci matice jsou násobeny proudem I_s, tak, jak to odpovídá situaci, kdy proud vytéká z uzlu *a* a vtéká do uzlu *b*. Jedničky v posledním řádku pak jsou násobeny napětími U_a resp. U_b a odpor - R_s proudem zdroje, jak předepisuje rovnice pro rozdíl napětí na svorkách zdroje.

Poznámka:

Uvedený modifikovaný zápis lze použít jak v případě, kdy je R_s rovno nule, tak i v případě, kdy je od nuly různé. Také napětí zdroje může být nulové. Potom dostáváme rovnice, ze kterých můžeme přímo počítat proud, který teče zvoleným rezistorem, případně i proud zkratovou spojkou (ampérmetrem, sepnutým spínačem).

Příklad 2.15.
Modifikovanou metodou uzlových napětí řešíme obvod na obr.2.21. Obvod obsahuje jeden ideální zdroj proudu a jeden ideální zdroj napětí. Vektor neznámých bude obsahovat tři napětí nezávislých uzlů a jeden proud zdroje napětí. V maticovém tvaru pak budou rovnice pro neznámé obvodové veličiny vypadat takto

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ I_s \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & I_s \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
G_1+G_2 & -G_2 & & -1 \\
-G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 & \\
 & -G_4 & G_4+G_5 & +1 \\ \hline
-1 & & +1 &
\end{array}\right]
\end{array}
\times
\left[\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hline I_s \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} \\ I_0 \\ \\ \hline U \end{array}\right]$$

Řízené zdroje v modifikované metodě uzlových napětí

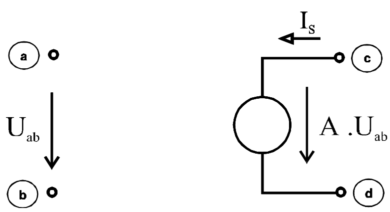
Zdroj napětí řízený napětím (ideální zesilovač napětí) je připojen ke zbytku obvodu ve čtyřech uzlech: uzly *a*, *b* jsou řídicí, uzly *c*, *d* jsou uzly samotného zdroje. Proud zdroje I_s vytéká z ulu *c* a vtéká do uzlu *d*. Napětí mezi výstupními uzly je úměrné rozdílu napětí mezi řídicími uzly

$$U_c - U_d = A(U_a - U_b), \qquad (2-43)$$

kde konstanta úměrnosti *A* je napěťové zesílení. Protože všechna čtyři napětí jsou neznámá, převedeme všechny členy na levou stranu rovnice

$$-AU_a + AU_b + U_c - U_d = 0. \qquad (2-44)$$

Příspěvek takového řízeného zdroje k celkové matici obvodu je pak vyjádřen razítkem tvaru

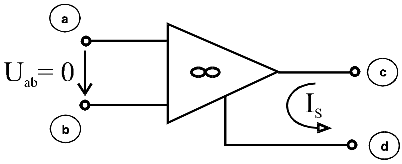


$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & I_s \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
 & & & & +1 \\
 & & & & -1 \\ \hline
-A & +A & +1 & -1 &
\end{array}\right]
\end{array}. \qquad (2-45)$$

Pravé strany rovnic nejsou řízeným zdrojem ovlivněny.
Rovnici pro napětí můžeme dělit zesílením *A* (předpokládáme samozřejmě, že je od nuly různé). Pak dostaneme jiný tvar razítka, který ovšem dává stejné výsledky:

$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & +1 \\ & & & & -1 \\ \hline -1 & +1 & \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} & \end{array}\right] \end{array} \quad . \qquad (2-46)$$

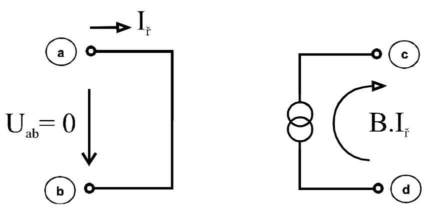
Jestliže nyní uvažujeme, že zesílení A roste nade všechny meze, dostaneme razítko pro ideální operační zesilovač. Protože ve sloupcích c a d jsou pouze nuly, razítko ideálního operačního zesilovače je



$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & I_S \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} & & +1 \\ & & -1 \\ \hline -1 & +1 & \end{array}\right] \end{array} \quad . \qquad (2-47)$$

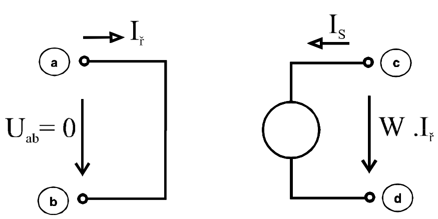
Jedničky v posledním řádku matice vyjadřují skutečnost, že vstupní napětí ideálního operačního zesilovače je rovno nule (napětí uzlů *a, b* jsou rovna).

Pro zdroj proudu řízený proudem (ideální zesilovač proudu se zesílením B) zavedeme vstupní (řídící) proud $I_ř$ tekoucí zkratovou spojkou mezi uzly *a* a *b* jako novou veličinu. Razítko zdroje proudu řízeného proudem je pak



$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_ř \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & I_ř \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} & & -B \\ & & +B \\ \hline +1 & -1 & \end{array}\right] \end{array} . \qquad (2-48)$$

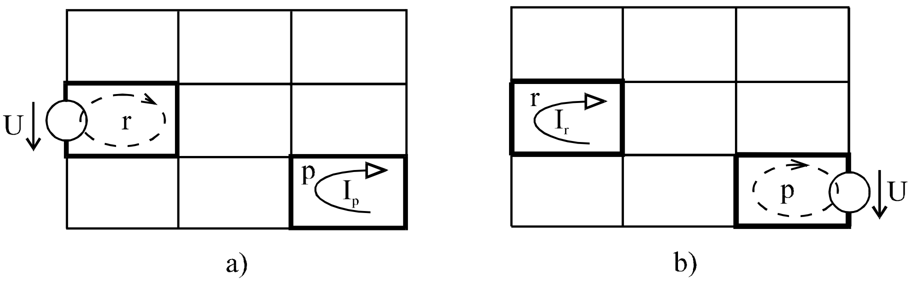
Zdroj napětí řízený proudem s převodním odporem W pak vyžaduje dva přídavné proudy, o které je třeba rozšířit vektor neznámých veličin: řídicí proud $I_ř$, tekoucí zkratovou spojkou mezi uzly *a, b* a výstupní proud řízeného zdroje I_s. Razítko zdroje napětí řízeného proudem má pak tvar



$$\begin{array}{c} \\ c \\ d \\ I_ř \\ I_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & I_ř & I_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} & & & & & -1 \\ & & & & & +1 \\ \hline +1 & -1 & & & & \\ & & -1 & +1 & W & \end{array}\right] \end{array} . \qquad (2-49)$$

2.4. **Principreciprocity** (vzájemnosti)

V předchozích odstavcích jsme poznali, že admitanční nebo impedanční matice obvodu, složeného pouze z pasivních dvojpólů (rezistorů, kapacitorů, induktorů) jsou symetrické podle hlavní diagonály. Takové obvody jsme také nazývali reciprocitní. Princip reciprocity obvodů nyní objasníme podrobněji.
Uvažujme složitý elektrický obvod, jehož graf je naznačen na obr.2.22a. V *r*-té smyčce působí zdroj napětí U a ten způsobí průtok proudu ostatními smyčkami, v *p*-té smyčce



Obr.2.22

např. protéká proud I_p, který vypočítáme jako

$$I_p = U \frac{\Delta_{r:p}}{\Delta} \ . \tag{2-50}$$

V tomto vztahu Δ je determinant impedanční matice soustavy, $\Delta_{r:p}$ je determinant impedanční matice, ve které jsme vypustili *r*-tý řádek a *p*-tý sloupec a násobili výrazem $(-1)^{r+p}$.

Protože je impedanční matice symetrická, platí

$$\Delta_{r:p} = \Delta_{p:r} \ . \tag{2-51}$$

Přemístíme-li tedy zdroj napětí do *p*-té smyčky, jak je naznačeno na obr.2.22b, naměříme v *r*-té smyčce stejně veliký proud

$$I_r = U \frac{\Delta_{p:r}}{\Delta} = I_p \ . \tag{2-52}$$

Uvedený princip můžeme formulovat také vzájemnou ekvivalencí přenosových admitancí G_{rp} a G_{pr}, určených oběma zlomky v rovnicích (2-50) a (2-52).

Podobně lze ukázat, že v reciprocitním obvodu se rovnají přenosové impedance (v našem případě odpory) R_{rp} a R_{pr}, kde

$$R_{rp} = \frac{U_p}{I_r} \tag{2-53}$$

je napětí uzlu *p*, vyvolané proudem I_r ze zdroje připojeného k uzlu *r* a naopak ve výrazu

$$R_{pr} = \frac{U_r}{I_p} \tag{2-54}$$

je U_r je napětí uzlu *r*, vytvořené proudem I_p, tekoucím do uzlu *p*.

Jakmile obvod obsahuje nějaký řízený zdroj nebo operační zesilovač, jeho matice není v obecném případě symetrická a obvod je **nereciprocitní**.

Příklad 2.16
Přenosový odpor z uzlu *1* (báze tranzistoru) do uzlu *2* (kolektor) tranzistorového zesilovače z příkladu 2.14 je roven

$$R_{12} = \frac{\Delta_{1:2}}{\Delta} = \frac{-199{,}096}{4{,}9720} = -40{,}043 k\Omega \ ,$$

zatímco přenosový odpor v obráceném směru je

$$R_{21} = \frac{\Delta_{2:1}}{\Delta} = \frac{0{,}9040}{4{,}9720} = 0{,}1818 k\Omega \ .$$

Rozdíl je způsoben přítomností řízeného zdroje proudu v náhradním schématu tranzistoru. Výpočet potvrzuje, že uvedený obvod není reciprocitní.

2.5. Dualita

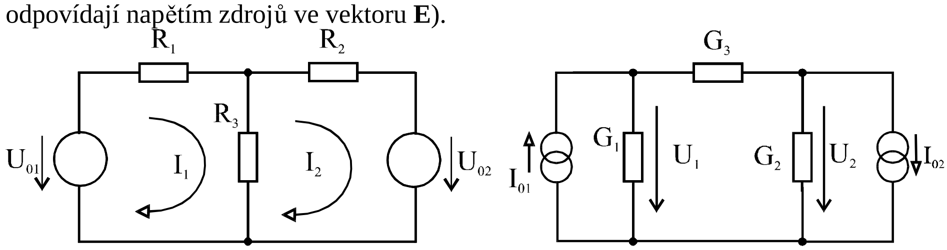
Dva odlišné obvody, z nichž jeden je popsán rovnicemi smyčkových proudů

$$\mathbf{ZI} = \mathbf{E} \qquad (2\text{ -}55)$$

a druhý rovnicemi uzlových napětí

$$\mathbf{YU} = \mathbf{J} \qquad (2\text{-}56)$$

nazýváme duální (z hlediska metody analýzy), jestliže obě soustavy rovnic mají stejný počet neznámých a matice **Y** a **Z** i vektory na pravých stranách mají shodnou strukturu (admitance v matici **Y** odpovídají impedancím v matici **Z,** proudy zdrojů ve vektoru **J** odpovídají napětím zdrojů ve vektoru **E**).



a) b)

Obr.2.23

Jednoduchý příklad duálních obvodů je nakreslen na obr.2.23a,b. Obvod na obr.2.23a je pospsán rovnicemi pro smyčkové proudy

$$\begin{aligned}(R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 &= U_{01} \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3) &= -U_{02}\end{aligned} \ , \qquad (2\text{-}57)$$

obvod na obr.2.23b rovnicemi pro uzlová napětí

$$\begin{aligned}(G_1 + G_2)U_1 - G_3 U_2 &= I_{01} \\ -G_3 U_1 + (G_2 + G_3)U_2 &= -I_{02}\end{aligned} \ . \qquad (2\text{-}58)$$

V duálních obvodech si vzájemně odpovídají

vodivost	-	odpor
admitance	-	impedance