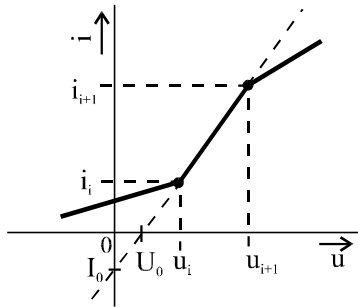


4.3.2. Po částech lineární aproximace

Při po částech lineární aproximaci neboli aproximaci lomenou přímkou nahradíme nelineární charakteristiku přímkovými úseky, spojujícími sousední měřené body. Charakteristika je tak v jednotlivých intervalech linearizována. Na obr.10a je nakreslen příklad charakteristiky nelineárního rezistoru. V úseku $u_i \leq u \leq u_{i+1}$ má aproximovaná charakteristika sklon daný dynamickou vodivostí

$$G_d = \frac{i_{i+1} - i_i}{u_{i+1} - u_i} \quad (4 - 14)$$

a protíná osu napětí v bodě $u = U_0$ a osu proudu v $i = I_0$. Rezistor je tak možno nahradit ekvivalentním sériovým spojením zdroje napětí U_0 a vnitřního odporu $R_d = 1/G_d$ nebo paralelním spojením zdroje proudu I_0 a téhož vnitřního odporu. Popsaný postup se jeví jako velmi výhodný, protože původní nelineární obvod se dá nyní řešit jako obvod lineární. Problém je však v tom, že v každém intervalu jsou parametry náhradního obvodu jiné a na počátku analýzy obvodu ani nevíme, kde máme řešení hledat. Obsahuje-li obvod takových prvků větší množství, velmi rychle narůstá počet



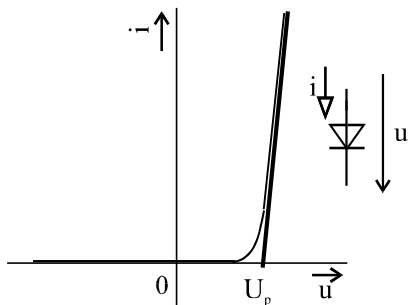
Obr.4.10a

možných kombinací poloh pracovních bodů na jednotlivých charakteristikách a řešení může být i za pomoci počítače časově neúnosně náročné .

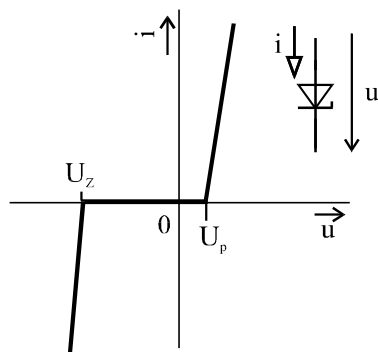
Analyzujeme-li obvod s časově proměnnými signály, musíme dále neustále sledovat okamžiky přechodu prvků z jednoho intervalu do druhého a odpovídajícím způsobem měnit parametry a v některých případech i konfiguraci řešeného obvodu.

Z uvedených důvodů se po částech lineární aproximace užívá převážně jen pro aproximaci charakteristiky diody nebo Zenerovy diody, tj. v

případech, kdy pro funkci prvku je rozhodující pouze jediný bod zlomu na charakteristice. **Charakteristika** typické **diody** je na obr.4.10b. Je-li anodové napětí u_{ak} záporné nebo malé kladné, proud diodou lze zanedbat. Až dosáhne anodové napětí několika desetin voltu, proud velmi rychle roste. Charakteristiku tak můžeme nahradit



Obr.4.10b



Obr.4.10c

dvěma polopřímkami, které se stýkají v bodě $u_{ak} = U_p$. Pro $u_{ak} < U_p$ dioda nevede a chová se jako rozpojený obvod. Pro $u_{ak} > U_p$ dioda propouští proud a chová se jako sériové spojení zdroje napětí U_p a malého vnitřního odporu. Je zřejmé, že při změně stavu diody dochází i ke změně počtu větví analyzovaného obvodu, obvod mění svoji konfiguraci a rovnice obvodu dostávají jiný tvar.

Na charakteristice **Zenerovy diody** (obr.4.10c) nás zajímá především oblast záporných napětí v okolí bodu $u_{ak} = U_z$, která se používá ve stabilizátorech stejnosměrného napětí.

I zde je použití aproximace lomenou přímkou naprosto oprávněné.

Poznamenejme ještě, že jsme se s možností aproximace lomenou přímkou již setkali v případě zesilovače s operačním zesilovačem, obr.4.8b.

4.3.3. Aproximace a interpolace polynomem

V okolí pracovního bodu Q rozvineme závislost $i=f(u)$, popisující nelineární charakteristiku prvku, v Taylorovu řadu

$$i(u) = I_Q + \frac{i'(U_Q)}{1!}(u - U_Q) + \frac{i''(U_Q)}{2!}(u - U_Q)^2 + \frac{i'''(U_Q)}{3!}(u - U_Q)^3 + \dots \quad (4 - 15)$$

Jednotlivé derivace di/du jsou vyhodnoceny v pracovním bodě $u = U_Q$ a jsou to proto vzhledem k u konstanty. Proto lze psát

$$i(u) = b_0 + b_1(u - U_Q) + b_2(u - U_Q)^2 + b_3(u - U_Q)^3 + \dots \quad (4 - 16)$$

resp. po provedení naznačených operací

$$i(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots \quad (4 - 17)$$

Při praktických výpočtech ovšem místo nekonečné řady používáme pouze konečný počet členů řady. Závislost je pak nahrazena **polynomem n -tého stupně**. Volba stupně polynomu je založena na kompromisu mezi přesností a jednoduchostí aproximace.

Volíme-li $n=1$, omezujeme se na první dva členy, zanedbáváme nelinearitu prvku a charakteristiku linearizujeme.

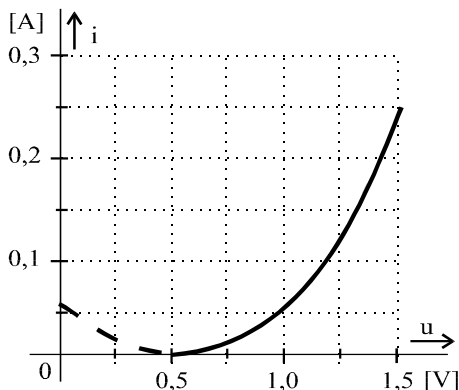
Nejjednodušší aproximace, která nelinearitu respektuje, je aproximace polynomem 2. stupně, tj. náhrada charakteristiky **kvadratickou parabolou** (obr.4.11a)

$$i_p = b_0 + b_1(u - U_Q) + b_2(u - U_Q)^2 = a_0 + a_1u + a_2u^2, \quad (4 - 18)$$

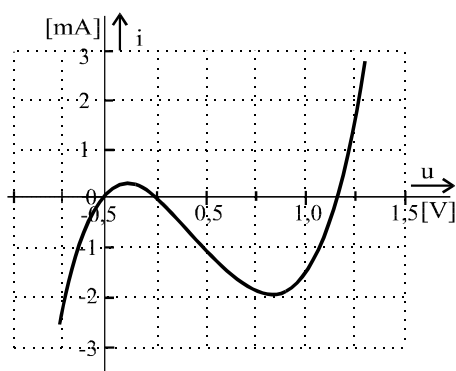
kde

$$a_0 = b_0 - b_1U_Q + b_2U_Q^2, \quad a_1 = b_1 - 2b_2U_Q, \quad a_2 = b_2. \quad (4 - 19)$$

Tuto aproximaci používáme pro monotónní charakteristiky a z paraboly využíváme pouze jednu (obvykle rostoucí) větev.



Obr.4.11a



Obr.4.11b

Aproximace kubickou parabolou, $n=3$ (obr.4.11b) umožňuje vystihnout existenci inflexního bodu a dvou extrémů na charakteristice. Pro proud pak můžeme psát

$$i_p = b_0 + b_1(u - U_Q) + b_2(u - U_Q)^2 + b_3(u - U_Q)^3 = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3, \quad (4 - 20)$$

kde

$$a_0 = b_0 - b_1U_Q + b_2U_Q^2 - b_3U_Q^3, \quad a_1 = b_1 - 2b_2U_Q + 3b_3U_Q^2, \quad (4 - 21), (4 - 22)$$

$$a_2 = b_2 - 3b_3U_Q, \quad a_3 = b_3. \quad (4 - 23)$$

Polynomy vyšších stupňů se k aproximaci používají jen zřídka a to tehdy, vyžadujeme-li vyšší přesnost aproximace a výpočty provádíme počítačem.

Určení koeficientů aproximačního polynomu n -tého stupně

Pro polynom n -tého stupně musíme stanovit hodnoty $n+1$ koeficientů $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ nebo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Ať již určíme koeficienty jakýmkoli způsobem, musíme se nakonec vždy přesvědčit, jak aproximační polynom probíhá a zda je získaná aproximace v požadovaném intervalu proměnných vyhovující.

Potřebujeme-li polynomem aproximovat závislost, která je dána analytickým výrazem (např. exponenciální funkcí), který nám ale pro daný účel nevyhovuje, vypočítáme příslušné derivace $i'(U_Q), i''(U_Q), \dots$ v pracovním bodě $u = U_Q$ a z nich potřebné koeficienty.

Obvykle však vycházíme z naměřených hodnot, které máme ve formě tabulky nebo grafu. Pak volíme mezi **interpolací** a **aproximací na nejmenší kvadratickou chybu**.

Aproximace interpolací

je postup, kdy se aproximační polynom n -tého stupně přesně shoduje s původním průběhem v $n+1$ bodech. Tím jsou dány podmínky pro určení potřebného počtu koeficientů.

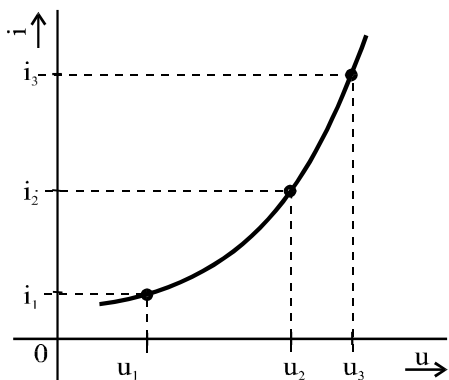
Pro interpolaci kvadratickou parabolou např. potřebujeme určit 3 koeficienty. Požadujeme proto, aby aproximační polynom procházel 3 měřeny body, které na charakteristice zvolíme. Pak v souladu s obr.4.12a musí platit

$$\begin{aligned} i_1 &= a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2, \\ i_2 &= a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2, \\ i_3 &= a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2. \end{aligned} \quad (4 - 24)$$

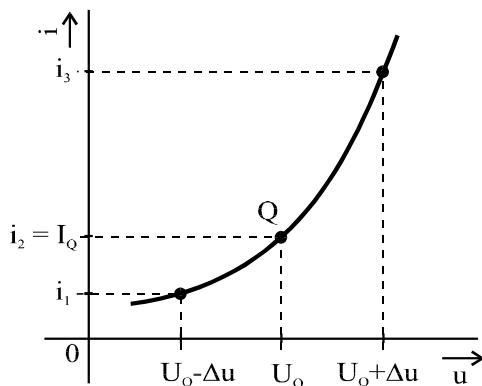
Dostali jsme soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou hledané koeficienty. Proces se zjednoduší, je-li $u_2 = U_Q$, napětí v pracovním bodě, a intervaly mezi zadanými body u_1, u_2, u_3 jsou zvoleny tak, že platí $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \Delta u$. Ukazuje to obr.4.12b.

Pak dostaneme pro hledané koeficienty

$$b_0 = i_2 = I_Q, \quad b_1 = \frac{i_3 - i_1}{2\Delta u}, \quad b_2 = \frac{i_1 + i_3 - 2i_2}{2\Delta u^2}. \quad (4 - 25), (4 - 26), (4 - 27)$$



Obr.4.12a



Obr.4.12b

Příklad 4.1:

Pro křemíkovou diodu byly naměřeny hodnoty uvedené v tabulce:

u [V]	0,20	0,40	0,50	0,55	0,60	0,625	0,65	0,675	0,70
i [A]	0	0	0,0005	0,004	0,02	0,10	0,45	0,60	1,0

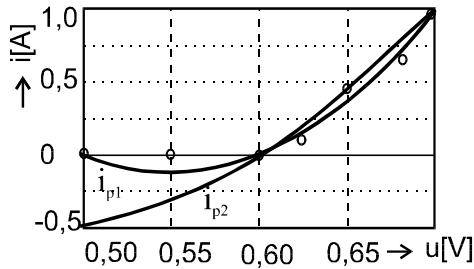
Interpolace kvadratickou parabolou kolem pracovního bodu $U_Q = 0,6V$ s $\Delta u = 0,1V$ vede na polynom

$$i_{p1} = 48,025u^2 - 52,6325u + 14,3105,$$

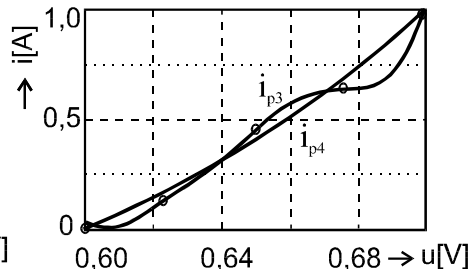
interpolace za podmínek $U_Q = 0,65V$, $\Delta u = 0,05V$ dává polynom

$$i_{p2} = 24u^2 - 21,4u + 4,22.$$

Výsledné parabolické průběhy jsou nakresleny na obr.4.13a. Kroužky v obrázku označují naměřené body. Je zřejmé, že náhrada skutečné charakteristiky polynomem 2. stupně je



Obr.4.13a



Obr.4.13b

vcelku přijatelná v intervalu napětí mezi 0,6 a 0,7 V. Pro napětí nižší než asi 0,6 V je prakticky nepoužitelná.

Křivkou označenou jako i_{p3} je na obr.4.13b zakreslen průběh polynomu 6. stupně, proloženého sedmi body od $u=0,5$ V do $u=0,7$. V obrázku je vykreslena jen část mezi 0,6 a 0,7 V. Protože přesnost naměřené charakteristiky byla malá, snaha vést interpolační křivku všemi naměřenými body zřejmě vede k výsledku, který se pro další použití nehodí.

Aproximace s nejmenší kvadratickou chybou.

Abychom potlačili vliv nepřesností při měření charakteristik a současně využili toho, že naměřených bodů máme k dispozici větší množství, používáme často **aproximaci** vedoucí **na nejmenší kvadratickou chybu**. Předpokládáme, že máme m bodů charakteristiky a chceme její průběh aproximovat polynomem nízkého stupně $n < m-1$. Aproximační polynom nebude ovšem v obecném případě procházet všemi naměřenými body, ale může procházet v jejich blízkosti. Za optimální pak považujeme takovou aproximační funkci, která nejlépe splňuje námi stanovená kritéria shody. Při ní je minimální tzv. účelová funkce σ , kterou v tomto případě definujeme jako sumu čtverců odchylek mezi naměřenými a aproximovanými hodnotami ve všech zadaných bodech, tj.

$$s = \sum_{j=1}^m [i_j - i_p(u_j)]^2 = \sum_{j=1}^m \left[i_j - (a_0 + a_1 u_j + a_2 u_j^2 + \dots + a_n u_j^n) \right]^2 \quad (4-28)$$

Indexem $j=1, 2, \dots, m$ označujeme souřadnice (u_j, i_j) naměřených bodů,

$i_p = f(u)$ je aproximační polynom n -tého stupně.

Účelová funkce σ je zřejmě funkcí koeficientů polynomu, $s = s(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Bude minimální tehdy, když všechny její parciální derivace podle jednotlivých koeficientů

budou současně rovny nule. Dostaneme tak soustavu $n+1$ lineárních rovnic, jejichž řešením jsou hledané koeficienty.

Např. při aproximaci kvadratickou parabolou $i_p = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ dostaneme tři rovnice ve tvaru (všechny sumy jsou pro $j=1$ až $j=m$)

$$\begin{bmatrix} m & \sum u_j & \sum u_j^2 \\ \sum u_j & \sum u_j^2 & \sum u_j^3 \\ \sum u_j^2 & \sum u_j^3 & \sum u_j^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_j \\ \sum i_j u_j \\ \sum i_j u_j^2 \end{bmatrix} \quad (4 - 29)$$

Hlavní výhodou tohoto typu aproximace je částečné **potlačení vlivu chyb** (nepřesností) při určení výchozích hodnot. Použití aproximace na nejmenší kvadratickou chybu připomíná použití křivítka při zakreslování křivky do grafu. (Tam se také nesnažíme vést čáru všemi vyznačenými body, ale tak, aby co nejlépe v celém intervalu vystihovala naměřenou závislost.) Na obr.4.13b je označena jako i_{p4} kvadratická parabola aproximující charakteristiku diody z minulého příkladu. Výpočet vycházel z pěti naměřených bodů v intervalu $u = 0,6 \text{ V}$ až $u = 0,7 \text{ V}$.

4.3.4. Aproximace exponenciální funkce

Aproximaci exponenciální funkcí používáme zvláště pro závislosti, které již na základě fyzikálních principů mají exponenciální charakter. Jde především o charakteristiky polovodičových přechodů PN používaných v diodách a tranzistorech. Aproximace má tvar

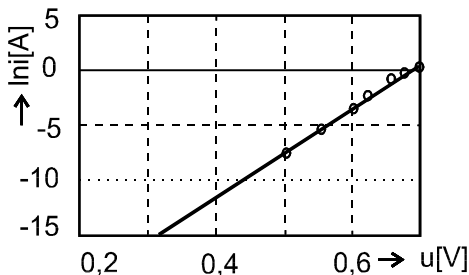
$$i_p = I_0 e^{au} \quad (4 - 30)$$

a je určena dvěma parametry: I_0 a a .

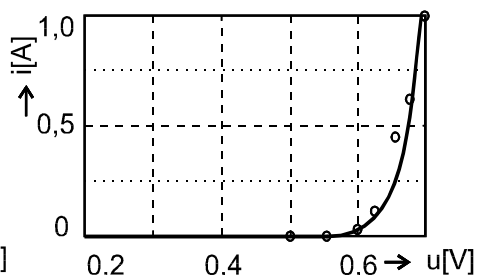
Vyneseme-li závislost $i_p = f(u)$ do grafu s lineárním dělením vodorovné osy napětí a logaritmickou stupnicí na svislé ose proudu, jak je naznačeno na obr.4.14a, dostaneme přímku

$$\ln i_p = \ln I_0 + a.u. \quad (4 - 31)$$

Přímka protíná osu proudu v bodě $\ln I_0$ a má sklon rovný parametru a . Hledané



Obr.4.14b



Obr.4.14c

parametry aproximace proto nejsnadněji určíme tak, že naměřené body vyneseme v **semilogaritmických souřadnicích** a proložíme jimi přímku. Požijeme-li přitom

aproximace na nejmenší kvadratickou chybu, určíme hodnoty I_0 a a ze soustavy rovnic (symbolem sumy opět označujeme součet pro všechna $j=1, 2, \dots, m$)

$$\begin{bmatrix} m & \sum u_j \\ \sum u_j & \sum u_j^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ln I_0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln i_j \\ \sum u_j \ln i_j \end{bmatrix}. \quad (4 - 32)$$

Příklad 4.2:

Na základě sedmi hodnot z tabulky minulého příkladu pro $u=0.5$ V až $u=0.7$ V vypočítáme

$\ln I_0 = -27.5714$, $a = 40.0822V^{-1}$, $I_0 = 1.06110^{-12}A$. Odpovídající závislosti v semilogaritmickém i lineárním měřítku spolu s naměřenými body jsou nakresleny na obr.4.14b,c.

4.3.5. Jiné druhy aproximace

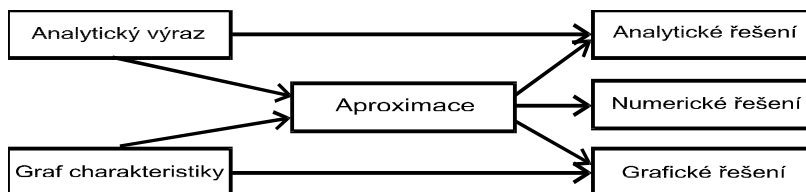
V některých případech se používá k aproximaci i jiných analytických funkcí. Příkladem může být funkce $\arctg(x)$, vhodná pro aproximaci závislostí symetrických podle počátku a vyznačujících se saturací, jako např. magnetizačních křivek $B = f(H)$ ferromagnetických materiálů nebo weberampérových charakteristik $\Psi = f(i)$ nelineárních induktorů.

4.4. Metody analýzy nelineárních obvodů

Jak již bylo uvedeno, postup při analýze chování nelineárního obvodu musíme vždy pečlivě volit s ohledem na konkrétní situaci, tj.

- podle druhu obvodu (nesetrvačný, setrvačný)
- podle velikosti signálu (malý, velký)
- podle toho, jaké jevy chceme sledovat (poloha pracovního bodu, přechodné jevy, ustálený stav, stabilita, ...)
- podle způsobu popisu nelinearity obvodu (charakteristiky ve formě tabulek nebo grafů, aproximace analytickým výrazem).

Problematiku názorně ilustruje vývojový diagram analýzy na obr.4.15.



Obr.4.15

V zásadě můžeme vycházet z grafických nebo analytických způsobů popisu vlastností nelineárních obvodových prvků a pro vlastní řešení máme pak k dispozici grafické, analytické nebo numerické postupy.

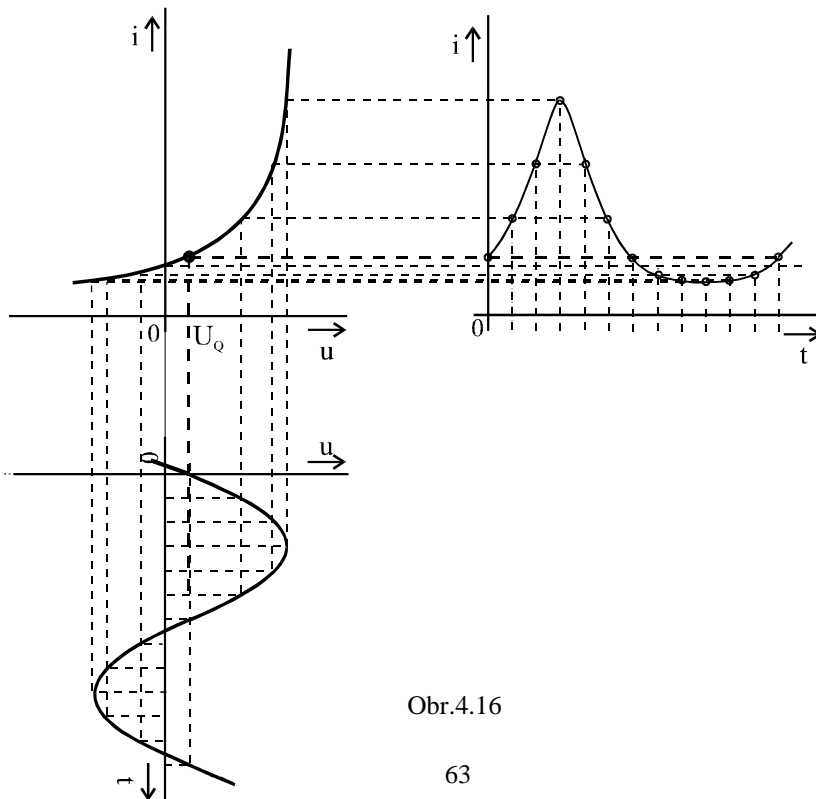
4.4.1. Grafické metody

Grafické řešení se dá použít pro jednodušší obvody. Vychází přímo z grafů charakteristik. Je obvykle jednoduché a názorné, vyžaduje však pečlivost a zručnost při realizaci jednotlivých operací. Nevýhodou grafického řešení je, že není obecné. Platí pouze pro danou konkrétní situaci a při každé změně v zadání obvodu je třeba celé řešení od začátku opakovat.

Obr.4.16a ukazuje, jak odvodíme **graf časového průběhu proudu** nelineárním rezistorem, známe-li průběh napětí na prvku (na obrázku je uvažováno harmonické napětí se stejnosměrnou složkou, $u(t) = U_Q + U_m \sin \omega t$). K ose napětí přikreslíme graf časového průběhu $u(t)$ a jeho časovou osu rozdělíme na dostatečný počet malých intervalů. Připravíme si souřadný systém pro závislost proudu na čase a i na jeho časové ose vyznačíme odpovídající intervaly. Pak postupně promítáme okamžité hodnoty napětí přes charakteristiku prvku a výsledný proud vynášíme do připravené soustavy souřadnic. Je-li nelineární rezistor napájen ze zdroje s daným vnitřním napětím U_i a nenulovým vnitřním odporem R_i , jak ukazuje schéma na obr.4.17a, hledáme velikost proudu obvodem $i = I_Q$ a napětí na rezistoru $u = U_Q$ graficky pomocí tzv. **zatěžovací přímky**.

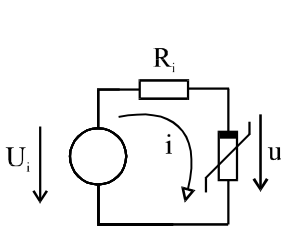
V obvodu zřejmě platí

$$u = U_i - i.R_i. \quad (4 - 33)$$

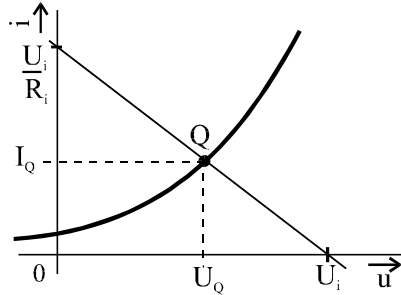


Obr.4.16

To je lineární vztah mezi napětím u a proudem i , jehož grafickým vyjádřením je přímka v souřadné soustavě u, i (obr.4.17b). Ta protíná osu napětí v bodě $u = U_i$ (pro osu napětí platí $i=0$) a osu proudu v bodě $i = U_i / R_i$ (pro tuto osu je $u=0$). Bod Q , ve kterém se tato přímka protíná s charakteristikou prvku, je jediný bod, v němž závislost proudu i na



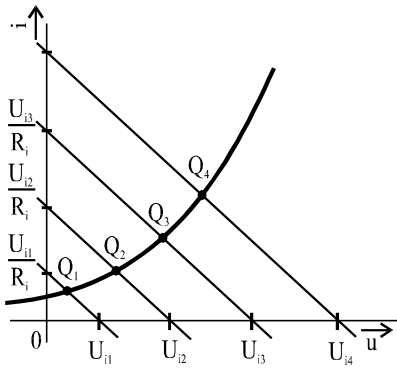
Obr.4.17a



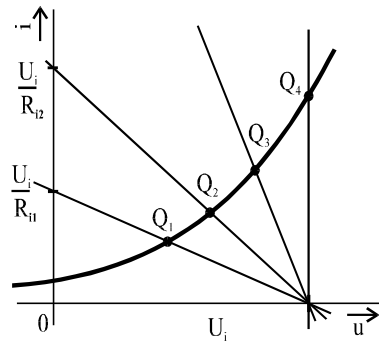
Obr.4.17b

napětí u současně splňuje rovnici (4 – 33) danou 2. Kirchhoffovým zákonem, a odpovídá ampérvoltové charakteristice $i = f(u)$.

Na obr.4.17c je ukázáno, jak se mění poloha pracovního bodu při změně vnitřního napětí zdroje. Protože je vnitřní odpor konstantní, konstantní zůstává i sklon zatěžovací přímky.



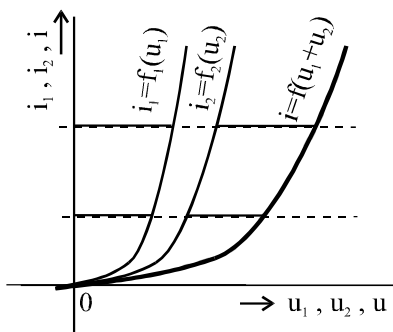
Obr.4.17c



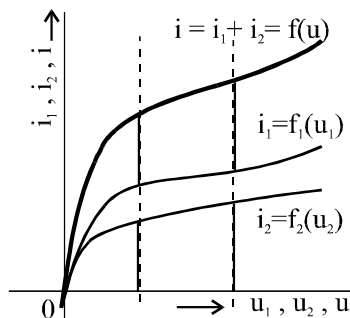
Obr.4.17d

Obr.4.17d naopak odpovídá situaci, kdy vnitřní napětí je konstantní, ale mění se vnitřní odpor zdroje. Čím je R_i větší, tím menší je sklon přímky. Při $R_i = 0$, kdy $U_Q = U_i$, je zatěžovací přímka rovnoběžná s osou proudu. Odpovídající pracovní bod je označen jako Q_4 .

Sériové nebo **paralelní spojení** dvou nebo více nelineárních rezistorů lze nahradit **jediným rezistorem** s odpovídající nelineární charakteristikou. Takto je možno obvod, ve kterém můžeme sériové a paralelní kombinace identifikovat, postupně zjednodušovat a vyřešit.



Obr.4.18a



Obr.4.18b

Jsou-li rezistory v sérii, jak ukazuje obr.4.18a, protéká jimi stejně veliký proud a napětí na sériové kombinaci je rovno součtu dílčích napětí na jednotlivých rezistorech. Charakteristiku sériové kombinace pak odvodíme bod po bodu. Pro každou hodnotu proudu I_p odečteme z charakteristik obou rezistorů příslušná napětí a vyneseme celkové napětí pro tento proud. Charakteristiky graficky sečítáme ve směru osy napětí.

Při paralelním spojení (obr.4.18b) naopak volíme napětí, z charakteristik zjistíme dílčí proudy a jejich součtem získáme celkový proud. Charakteristiky graficky sečítáme ve směru osy proudu.