4.4.2. Analytické metody

Význam analytických postupů řešení spočívá v tom, že výsledek získáme v obecném tvaru. Při změnách parametrů obvodu pak stačí dosazovat do výsledných vztahů pouze konkrétní hodnoty a řešení již nemusíme opakovat. Potíž je v tom, že řešení nelineárních problémů, se kterými se v praxi setkáváme, vede v naprosté většině případů na rovnice, které řešení v uzavřeném tvaru nemají. Proto se analytických metod používá většinou jen pro demonstraci některých obecných vlastností nelineárních obvodů. Ukážeme to na dvou příkladech.

Příklad 4.3: Vznik vyšších harmonických v nelineárním obvodu

Uvažujeme nelineární rezistor s charakteristikou aproximovanou polynomem ***n***-tého stupně

$$i_p = b_0 + b_1\left(u - U_Q\right) + b_2\left(u - U_Q\right)^2 + \ldots + b_n\left(u - U_Q\right)^n ,$$

na který bylo přivedeno napětí

$$u = U_Q + U_m \cos wt .$$

Pro proud rezistorem pak platí

$$i = b_0 + b_1 U_m \cos wt + b_2 {U_m}^2 \cos^2 wt + b_3 {U_m}^3 \cos^3 wt + \ldots =$$

$$= b_0 + b_1 U_m \cos wt + b_2 {U_m}^2 \frac{1 + \cos 2wt}{2} + b_3 {U_m}^3 \frac{3\cos wt + \cos 3wt}{4} + \ldots$$

Výsledný výraz rozdělíme na členy, násobené $\cos kwt$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Pro $k=0$ dostaneme tzv. stejnosměrnou složku, která je konstantní v čase

$$I_0 = b_0 + \frac{1}{2} b_2 {U_m}^2 + \frac{3}{8} b_4 {U_m}^4 + \ldots \quad .$$

Pro k =1 dostáváme harmonický průběh s kmitočtem ω stejným jako je kmitočet napájecího napětí. Jde o tzv. **základní** nebo **první harmonickou složku**

$$I_1 \cos wt = \left(b_1 U_m + \frac{3}{4} b_3 {U_m}^3 + \ldots \right) \cos wt .$$

Dále máme **2. harmonickou**

$$I_2 \cos 2wt = \left(\frac{1}{2} b_2 {U_m}^2 + \frac{1}{2} b_4 {U_m}^4 + \ldots \right) \cos 2wt$$

a **vyšší harmonické složky**.

Nelineární prvek způsobil vznik složek proudu s novými kmitočty. Tento jev se dá vyvolat záměrně a využít k **násobení kmitočtu** celým číslem tak, jak je to potřeba např. v rádiových vysílačích nebo kmitočtových ústřednách. Na druhé straně však může jít o jev nežádaný. Vznik vyšších harmonických kmitočtů pak pokládáme za projev tzv. **neharmonického zkreslení** zpracovávaného signálu.

Při podrobnějším rozboru popsané situace dále zjistíme, že
- liché členy polynomu generují liché harmonické složky (liché násobky základního kmitočtu)
- sudé členy polynomu ovlivňují velikost stejnosměrné složky a generují sudé

harmonické

- maximální řád harmonické je roven stupni polynomu n, kterým aproximujeme charakteristiku nelineárního rezistoru.

Příklad 4.4: Vznik kombinačních kmitočtů

Uvažujeme opět rezistor, jehož charakteristika je aproximována polynomem. Napětí na rezistoru je složeno ze stejnosměrné složky a dvou harmonických napětí s rozdílnými amplitudami a kmitočty

$$u = U_Q + U_{m1}\cos w_1 t + U_{m2}\cos w_2 t \,.$$

Pro jednoduchost se v dalším omezíme na případ, kdy je použito aproximace kvadratickou parabolou, *n=2*. Pro okamžitou hodnotu proudu pak platí

$$i = b_0 + b_1\left(U_{m1}\cos w_1 t + U_{m2}\cos w_2 t\right) +$$
$$+ b_2\left(U_{m1}^2\cos^2 w_1 t + 2U_{m1}U_{m2}\cos w_1 t\cos w_2 t + U_{m2}^2\cos^2 w_2 t\right)$$

Provedeme úpravy členů obsahujících čtverce a součiny kosinů a rozdělíme výsledek podle kmitočtů. Dostaneme tak

stejnosměrnou složku $b_0 + \frac{1}{2} b_2\left(U_{m1}^2 + U_{m2}^2\right)$,

obě základní harmonické $b_1\left(U_{m1}\cos w_1 t + U_{m2}\cos w_2 t\right)$,

obě druhé harmonické $\frac{1}{2} b_2\left(U_{m1}^2\cos 2w_1 t + U_{m2}^2\cos 2w_2 t\right)$

a navíc dvojici složek s tzv. **kombinačními kmitočty**

$$b_2 U_{m1}U_{m2}[\cos(w_1 + w_2)t + \cos(w_1 - w_2)t] \,.$$

Amplituda složek s kombinačními kmitočty je úměrná součinu amplitud $U_{m1}U_{m2}$. Tyto složky proto existují pouze tehdy, jsou-li jak U_{m1}, tak i U_{m2} různé od nuly.

Nových kmitočtů využíváme při **konverzi kmitočtu** např. ve směšovacích rádiových přijímačů nebo v televizních retranslačních stanicích a dále při procesech **modulace a demodulace**.

Nežádoucím jevem na druhé straně je vznik tzv. **intermodulačního zkreslení** v zesilovačích akustického signálu, které bývá daleko rušivější než zkreslení neharmonické.

Poznámka: Podrobnější rozbor s aproximací polynomem vyššího stupně *n>2* ukáže, že kombinační složky mohou mít kmitočty

$$i.w_1 \pm j.w_2 \qquad i, j = 1,2,\ldots,n \;,\quad \text{kde} \quad i + j \le n \,.$$

Např. pro *n=4* můžeme získat kmitočty

$$w_1 \pm w_2,\; 2w_1 \pm w_2,\; w_1 \pm 2w_2,\; 2(w_1 \pm w_2),\; 3w_1 \pm w_2,\; w_1 \pm 3w_2 \,.$$

Při analýze složitějších obvodů na základě analytického vyjádření nelineárních charakteristik sestavíme nelineární algebraické (tj. nediferenciální) rovnice a ty pak řešíme pro neznámá napětí a proudy. Řešení těchto rovnic v uzavřeném tvaru je možné jen v těch nejjednodušších případech a i pak je relativně složité, jak ilustruje následující příklad. V naprosté většině prakticky významných případů však řešení v uzavřeném tvaru neexistuje a obvodové rovnice musíme řešit numericky.

Příklad 4.5:

Ampérvoltová charakteristika nelineárního rezistoru je pro $u^{3}0$ popsána kvadratickým polynomem $i = a_2 . u^2$, $a_2 > 0$.

Hledáme proud i a napětí u, je-li rezistor napájen ze zdroje napětí $U_i > 0$ s lineárním vnitřním odporem R_i.

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí $u = U_i - i.R_i$. Dosadíme za proud, upravíme a dostaneme kvadratickou rovnici

$$u^2 + \frac{1}{a_2 R_i} u - \frac{U_i}{a_2 R_i} = 0$$

s řešením $$u = -\frac{1}{2a_2 R_i} + \frac{1}{2a_2 R_i}\sqrt{1 + 4a_2 R_i U_i} \; .$$

(Protože $U_i > 0$, musí být $u > 0$ a proto uvažujeme pouze řešení s kladným znaménkem před odmocninou.)

Je-li v konkrétním případě např. $a_2 = 2AV^{-2}$, $R_i = 10\Omega$, $U_i = 2V$ (konstantní napětí), vypočítáme *u=0.292214 V, i=0.170779 A.*

Je-li ke konstantní složce napětí zdroje přičteno harmonické napětí s amplitudou $U_m = 1V$ a s kmitočtem *w*, tj. $U_i = 2 + \sin wt$, okamžitá hodnota napětí zdroje se mění od minimální hodnoty *1 V* do maximální hodnoty *3 V* a odpovídající napětí na nelineárním rezistoru a proud v obvodu pak jsou

$$u_{\min} = 0.2V,\; i_{\max} = 0.18A \quad \text{a} \quad u_{\max} = 0.363104V,\; i_{\min} = 0.163690A \; .$$

Pro průběh napětí v závislosti na čase pak dostaneme

$$u(t) = 0.025[-1 + \sqrt{1 + 160 + 80\cos wt}\,] = -0.025 + 0.317214\sqrt{1 + 0.496894\cos t} \; .$$

Odmocninu $\sqrt{1+x}$ rozvineme v řadu

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots \; ,$$

takže

$$u(t) = 0.292214 + 0.078811\cos wt - 0.019703\cos^2 wt + 0.0098514\cos^3 wt - \ldots$$

Napětí $u(t)$ je zkresleno vyššími harmonickými a proud $i(t)$ v důsledku toho také. Sériový odpor R_i způsobí, že řád nejvyšší harmonické není omezen stupněm aproximačního polynomu.

4.4.3. Numerické metody

Numerické metody umožňují řešení nelineárních rovnic elektrických obvodů pomocí počítače. Protože tyto rovnice nemají v obecném případě řešení v uzavřeném tvaru, používá se při řešení **iteračního postupu**, tj. postupu založeném na postupném přibližování ke konečnému výsledku. Nejdůležitější z těchto metod ukážeme na příkladu řešení nelineární rovnice o jedné neznámé

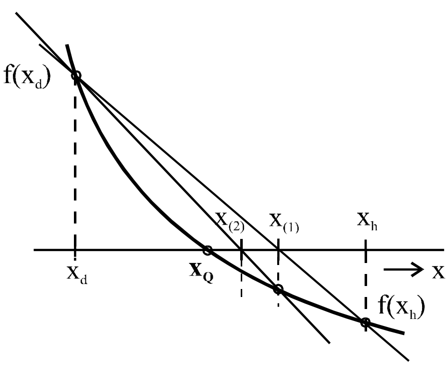
$$f(x) = 0 .$$

Hledáme kořen $x = x_Q$, pro který je daná rovnice splněna. O funkci *f(x)* předpokládáme, že je spojitá a má jen jeden kořen.

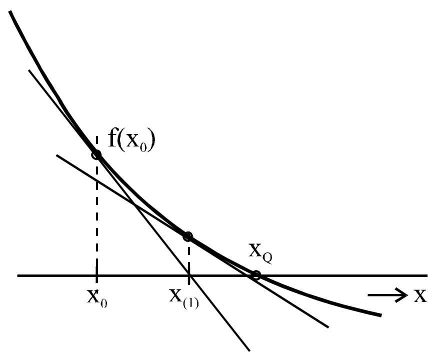
Metoda půlení intervalu je jednoduchá a spolehlivá. Vycházíme z toho, že známe body x_d a x_h, $x_d < x_h$, ve kterých se hodnota funkce *f(x)* liší znaménkem. Hledaný bod x_Q musí proto ležet mezi dolním a horním okrajem intervalu (x_d, x_h).

Nalezneme střední bod $x_s = (x_d + x_h)/2$ a vypočítáme v něm funkční hodnotu $f(x_s)$. Podle jejího znaménka rozhodneme, ve které polovině původního intervalu kořen x_Q leží. Dostali jsme tak novou dvojici bodů x_d, x_h. Pokračujeme stejným způsobem tak dlouho dokud absolutní hodnota funkce *f(x)* nepoklesne pod požadovanou hranici přesnosti řešení.

Metoda sečen, někdy také nazývaná **regula falsi**, vychází rovněž z dvojice bodů x_d, x_h, ohraničujících interval, ve kterém leží hledané řešení. Na obr.4.19a je graficky znázorněn princip metody. Sestavíme rovnici sečny, tj. přímky procházející body $(x_d, f(x_d))$ a $(x_h, f(x_h))$ a vypočítáme souřadnici $x_{(1)}$ jejího průsečíku s osou *x*. Znaménko hodnoty $f(x_{(1)})$ pak určí, ve kterém dílčím intervalu máme kořen x_Q hledat. Poté vypočteme opět polohu bodu $x_{(2)}$ a funkční hodnotu hodnotu funkce $f(x_{(2)})$ a dále pokračujeme stejným způsobem opět tak dlouho, pokud je to nutné.



Obr.4.19a



Obr.4.19b

Velmi účinná je **Newtonova metoda tečen** (často nazývaná Newtonova - Raphsonova). Na rozdíl od metody půlení intervalu nebo metody regula falsi vychází z jediného počátečního bodu $(x_0, f(x_0))$ na křivce *f(x)*. Průsečík tečny ke křivce v tomto bodě s osou *x* označíme jako $x_{(1)}$ a pokládáme jej za výchozí bod dalšího řešení.

Platí zřejmě

$$\Delta x_{(1)} = x_{(1)} - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{4 – 31}$$

kde $f'(x_0)$ je hodnota derivace $\frac{df(x)}{dx}$ v bodě $x = x_0$.

Proto

$$x_{(1)} = x_0 + \Delta x_{(1)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{4 – 32}$$

$$x_{(2)} = x_{(1)} + \Delta x_{(2)} = x_{(1)} - \frac{f(x_{(1)})}{f'(x_{(1)})}, \text{ atd.,} \tag{4 – 33}$$

obecně v ***i***-tém kroku iterace

$$x_{(i)} = x_{(i-1)} - \frac{f(x_{(i-1)})}{f'(x_{(i-1)})}. \tag{4 – 34}$$

Řešíme-li soustavu *n* nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ &\ldots \\ &f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{aligned} \tag{4 – 35}$$

neboli

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{4 – 36}$$

kde $\mathbf{f}$ je vektorová funkce,
$\mathbf{x}$ je vektor neznámých řešení $x_{1Q}, x_{2Q}, \ldots x_{nQ}$
$\mathbf{0}$ je nulový vektor,
vektor oprav $\Delta\mathbf{x}$ získáme řešením lineární rovnice

$$\mathbf{J}.\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4 – 37}$$

kde

$\mathbf{J} = \frac{\partial\, \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial\, \mathbf{x}}$ je tzv. jakobián soustavy, tj. čtvercová matice $n \times n$, jejíž prvek v ***i***-tém řádku a ***j***-tém sloupci je roven parciální derivaci $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Poznámka:

Řešíme-li obvod metodou uzlových napětí, je jakobián roven **admitanční matici obvodu**, ve kterém vystupují **dynamické vodivosti** nelineárních prvků, tj. jejich linearizované parametry, určené v aktuálních pracovních bodech.

Příklad 4.6: Iterační řešení obvodu s diodou, jehož schéma je na obr.4.20a

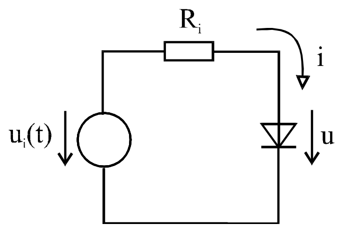
Parametry $U_i = 2V, R_i = 100\Omega$, charakteristika diody $i = I_s e^{au} = 10^{-12} e^{40u}$.

Rovnice obvodu jsou:

$$-U_i + R_i I_s e^{au} + u = f(u) = 0$$

$$f(u) = -2 + 10^{-10} e^{40u} + u$$

$$f'(u) = 1 + 4.10^{-9} e^{40u}$$



Obr.4.20a

Vyjdeme z počátečního odhadu napětí na diodě $u_0 = 0.6V$.

1. krok iterace

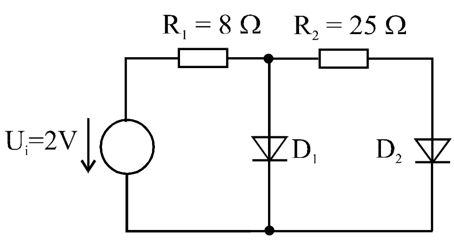
$$\Delta u_{(1)} = -\frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = -\frac{1.2489}{106.96} = -0.0116767V , \quad u_{(1)} = 0.5883V$$

2. krok iterace vede na $u_{(2)} = 0.5846V$,

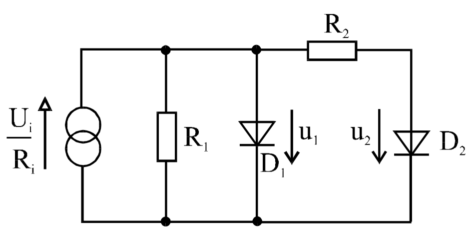
konečné řešení s přesností na 4 platná místa je $u_Q = 0.5843V, i_Q = 0.01416A$.

Příklad 4.7: Iterační řešení složitějšího obvodu se dvěma diodami z obr.4.20b.

Obvod budeme řešit metodou uzlových napětí. Proto zdroj napětí U_i v sérii s R_1 nahradíme ekvivalentním zdrojem proudu. Řešíme pak obvod na obr.4.20c. Charakteristiky obou diod jsou aproximovány vztahem $i = 10^{-12}.e^{40u}$.



Obr.4.20b



Obr.4.20c

Rovnice pro uzlová napětí vycházejí z 1. Kirchhoffova zákona pro proudy v obou nezávislých uzlech

$$\frac{1}{R_1}u_1+\frac{1}{R_2}\left(u_1-u_2\right)+I_s e^{au_1}-\frac{U_i}{R_1}=f_1\left(u_1,u_2\right)=0$$

$$\frac{1}{R_2}\left(u_2-u_1\right)+I_s e^{au_2}=f_2\left(u_1,u_2\right)=0$$

Linearizované rovnice v maticovém tvaru jsou

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+aI_s e^{au_{1(i-1)}} & -G_2 \\ -G_2 & G_2+aI_s e^{au_{2(i-1)}} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta u_{1(i)} \\ \Delta u_{2(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-f_1\left(u_{1(i-1)},u_{2(i-1)}\right) \\ -f_2\left(u_{1(i-1)},u_{2(i-1)}\right)\end{bmatrix}.$$

V jazyku MATLAB můžeme úlohu zapsat např. takto:

```
% Iterativni reseni prikladu se dvema diodami
G1=1/8;  G2=1/25;  Ui=2;      % parametry obvodu
a=40;    Is=1e-12;
u=[0.7;0.7];                  % pocatecni odhad uzlovych
napeti
delta_u=[1000;1000];          % pocatecni stav vektoru
oprav
iter=0;                       % pocitadlo iteraci
while max(abs(delta_u))>0.0001  % zacatek iteracniho cyklu
  iD1=Is*exp(a*u(1));         % proudy diod
  iD2=Is*exp(a*u(2));
  mat=[G1+G2+a*iD1, -G2; -G2, G2+a*iD2]; % matice soustavy
% prave strany
  b=[-(G1*u(1)+G2*(u(1)-u(2))+iD1-G1*Ui); …
     -(G2*(u(2)-u(1))+iD2)];
  delta_u=mat\b;                          % vypocet opravy
  u=u+delta_u;                            % opravena napeti
  iter=iter+1;                            % pocitej iterace
end
format long                    % format zobrazeni vysledku
iter                           % celkovy pocet iteraci
u                              % vysledna napeti
```

Vycházíme-li z počátečního odhadu u_1=u_2=0,7 V, je výsledné řešení po 9 iteracích

$$u_{1Q}=0{,}645805\ [V],\qquad u_{2Q}=0{,}551321\ [V]\ .$$