

Teorie obvodů

Autor textu:

Prof. Ing. Tomáš Dostál, DrSc.

Obsah

1	ÚVOD	10
1.1	ZAŘAZENÍ PŘEDMĚTU VE STUDIJNÍM PROGRAMU	10
1.2	CÍL PŘEDMĚTU	10
1.3	ANOTACE PŘEDMĚTU	10
1.4	VSTUPNÍ TEST	10
2	ELEKTRONICKÉ OBVODY	12
2.1	ZÁKLADNÍ POJMY A DĚLENÍ OBVODŮ	12
2.2	ZÁKONY A TEORÉMY V ELEKTRONICKÝCH OBVODECH	12
2.2.1	<i>Proudový Kirchhoffův zákon a jeho zobecnění</i>	12
2.2.2	<i>Princip superpozice</i>	13
2.2.3	<i>Théveninův teorém</i>	14
2.2.4	<i>Nortonův teorém</i>	16
2.2.5	<i>Teorém o přenosu maximálního výkonu</i>	17
2.2.6	<i>Teorém reciprocity</i>	18
2.3	KONTROLNÍ OTÁZKY Z TÉTO KAPITOLY	19
3	OBVODOVÉ FUNKCE A PARAMETRY	20
3.1	ZÁKLADNÍ OBVODOVÉ FUNKCE	20
3.2	KMITOČTOVÉ CHARAKTERISTIKY	21
3.3	PÓLY A NULOVÉ BODY	23
3.4	MATICOVÉ PARAMETRY DVOJBRANŮ	25
3.5	OBRAZOVÉ PARAMETRY DVOJBRANŮ	25
3.6	KONTROLNÍ OTÁZKY Z TÉTO KAPITOLY	27
4	MODELOVÁNÍ SKUTEČNÝCH OBVODOVÝCH PRVKŮ	28
4.1	FILOZOFIE MODELOVÁNÍ	28
4.2	APROXIMACE NELINEÁRNÍCH CHARAKTERISTIK	29
4.3	LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ MODEL Y	30
4.4	MODELOVÁNÍ SKUTEČNÉ POLOVODIČOVÉ DIODY	30
4.4.1	<i>Podrobný rezistivní model polovodičové diody</i>	30
4.4.2	<i>Určování parametrů diody</i>	31
4.4.3	<i>Jednoduchý model diody</i>	31
4.4.4	<i>Modelování setrvačných vlastností diody</i>	32
4.4.5	<i>Specifikace parametrů diody</i>	32
4.5	MODELOVÁNÍ BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU	32
4.5.1	<i>Globální nelineární modely bipolárního tranzistoru</i>	33
4.5.2	<i>Specifikace parametrů BJT</i>	34
4.5.3	<i>Lokální lineární modely BJT</i>	34
4.5.4	<i>Modelování BJT v oblasti VF</i>	37
4.6	MODELOVÁNÍ UNIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU	38
4.6.1	<i>Lokální lineární model FETu</i>	38
4.6.2	<i>Globální nelineární model FETu</i>	38
4.7	MODELOVÁNÍ TRIODY	39
4.8	MODELOVÁNÍ FUNKČNÍCH BLOKŮ	39
4.9	MODEL Y REÁLNÉHO OPERAČNÍHO ZESILOVAČE	40
4.10	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 4	41
5	TOPOLOGIE ELEKTRONICKÝCH OBVODŮ	43
5.1	ZÁKLADNÍ POJMY	43
5.2	POPIS INCIDENČNÍMI MATICEMI	45
5.3	SOUBOR ŘEZŮ GRAFU	46
5.4	INCIDENČNÍ MATICE SMYČEK A VĚTVÍ	47
5.5	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 5	47
6	ZÁKLADNÍ MATICOVÉ METODY ANALÝZY OBVODŮ	48
6.1	ANALÝZA LINEARIZOVANÝCH OBVODŮ	48

6.2	METODA SMYČKOVÝCH PROUDŮ	48
6.2.1	<i>Princip MSP</i>	48
6.2.2	<i>Algoritmus sestavování impedanční matice vhodný pro počítač</i>	49
6.2.3	<i>Určování obvodových funkcí pomocí algebraických doplňků</i>	51
6.3	METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ	51
6.3.1	<i>Princip MUN</i>	51
6.3.2	<i>Algoritmus sestavování admitanční matice vhodný pro počítač</i>	53
6.3.3	<i>Určování obvodových funkcí pomocí algebraických doplňků</i>	54
6.3.4	<i>Úplný admitanční popis soustavy</i>	54
6.4	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 6	56
7	ANALÝZA OBVODŮ S REGULÁRNÍMI DVOJBRANY A VÍCEBRANY	57
7.1	METODA SMYČKOVÝCH PROUDŮ ZOBECNĚNÁ PRO REGULÁRNÍ VÍCEBRANY	57
7.2	METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ ZOBECNĚNÁ PRO REGULÁRNÍ VÍCEBRANY	61
7.3	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 7	63
8	ANALÝZA OBVODŮ S NEREGULÁRNÍMI PRVKY	64
8.1	NEREGULÁRNÍ PRVKY A FUNKČNÍ BLOKY	64
8.2	PRINCIP ANALÝZY ZALOŽENÉ NA METODĚ LINEÁRNÍ TRANSFORMACE	66
8.3	TRANSFORMACE POMOCÍ OPERACÍ S ŘÁDKY A SLOUPCI	67
8.4	ANALÝZA SOUSTAV S IDEÁLNÍMI ZESILOVAČI.....	69
8.5	ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY ŘEŠENÍ NEREGULÁRNÍCH OBVODŮ	71
8.6	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 8	74
9	METODY SMÍŠENÉHO POPISU OBVODŮ	75
9.1	MODIFIKOVANÁ METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ	75
9.2	DIAKOPTICKÁ HYBRIDNÍ METODA.....	78
9.3	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 9	80
10	METODA ORIENTO VANÝCH GRAFŮ	80
10.1	PODSTATA METODY	80
10.2	KONSTRUKCE GRAFU MC	81
10.3	VYHODNOCENÍ GRAFU MC	82
10.4	TRANSFORMAČNÍ GRAFY NEREGULÁRNÍCH PRVKŮ	84
10.5	GRAFY SIGNÁLOVÝCH TOKŮ	86
10.6	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 10	88
11	ELEKTRONICKÝ OBVOD JAKO SOUSTAVA	89
11.1	OBVOD JAKO LINEÁRNÍ DYNAMICKÁ SOUSTAVA	89
11.2	OBE CNÉ VLASTNOSTI PŘENOSOVÉ SOUSTAVY OBVODŮ	90
11.2.1	<i>Ideální přenosová soustava</i>	90
11.2.2	<i>Souvislost mezi časovými a kmitočtovými charakteristikami</i>	91
11.2.3	<i>Podmínky realizovatelnosti přenosové soustavy</i>	91
11.2.4	<i>Obvody s minimálním a neminimálním argumentem</i>	92
11.2.5	<i>Hilbertova transformace</i>	93
11.2.6	<i>Všepropustné fázovací dvojbrany</i>	94
11.3	UZAVŘENÁ SOUSTAVA A JEJÍ POPIS	94
11.4	OSCILAČNÍ PODMÍNKY	96
11.5	STABILITA SOUSTAV LINEARIZOVANÝCH OBVODŮ	97
11.5.1	<i>Nyquistovo kritérium</i>	98
11.5.2	<i>Bodeho kritérium</i>	99
11.6	ZPĚTNÁ VAZBA V ELEKTRONICKÝCH OBVODECH	100
11.6.1	<i>Princip zpětné vazby</i>	100
11.6.2	<i>Základní rovnice zpětné vazby</i>	101
11.6.3	<i>Druhy zpětné vazby dle zapojení</i>	101
11.6.4	<i>Vliv zpětné vazby na parametry obvodu</i>	102
11.6.5	<i>Zapojení zpětné vazby v zesilovačích</i>	103
11.7	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 11	105
12	METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH OBVODŮ	106

12.1	OBEZNĚ O ANALÝZE NELINEÁRNÍCH OBVDŮ	106
12.2	NELINEÁRNÍ DVOJPÓLY A DVOJBRANY	106
12.3	LINEARIZACE	108
12.3.1	Linearizace neřizeného nelineárního rezistoru	108
12.3.2	Linearizace řízeného nelineárního rezistoru	109
12.3.3	Linearizace nelineárního dvojbranu	109
12.4	GRAFICKÉ METODY	110
12.5	ANALYTICKÉ METODY	113
12.5.1	Principy zjednodušování řešení	113
12.5.2	Stavy a děje v nelineárních obvodech	115
12.5.3	Metoda stavových proměnných	116
12.5.4	Řešení nelineárních obvodů 2. řádu	117
12.5.5	Metoda linearizace po částech	119
12.5.6	Metoda ekvivalentní linearizace	119
12.5.7	Metoda pomalu se měnící amplitudy	120
12.6	NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH OBVDŮ	120
12.6.1	Stejnoseměrná analýza obvodů	120
12.6.2	Řešení setrvačných obvodů	122
12.7	URČENÍ SPEKTRA SIGNÁLŮ V NELINEÁRNÍCH OBVODECH	123
12.7.1	Působení jednoho harmonického signálu na nelineární rezistor	123
12.7.2	Určení složek spektra	124
12.7.3	Určení složek spektra proudu při aproximaci mocninovým polynomem	124
12.7.4	Určení složek spektra proudu při aproximaci exponenciálou	125
12.7.5	Určení složek spektra proudu při aproximaci lomenou přímkou	126
12.7.6	Působení několika harmonických signálů na nelineární rezistor	127
12.7.7	Princip harmonické a energetické rovnováhy	128
12.7.8	Spektrální analýza signálů v parametrických obvodech	129
12.7.9	Obecné vztahy mezi výkony	129
12.8	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 12	131
13	CITLIVOSTNÍ ANALÝZA OBVDŮ	132
13.1	DEFINICE ZÁKLADNÍCH CITLIVOSTÍ	132
13.2	CITLIVOST OBVDŮVÉ FUNKCE	133
13.3	CITLIVOST KMITOČTOVÝCH CHARAKTERISTIK	135
13.4	CITLIVOST PÓLŮ A NULOVÝCH BODŮ	136
13.5	CITLIVOST PARAMETRŮ PÓLŮ	137
13.6	SOUČIN ZISKU A CITLIVOSTI	137
13.7	VÍCEPARAMETROVÉ SOUHRNNÉ CITLIVOSTI	138
13.8	INVARIANCE CITLIVOSTÍ	140
13.9	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 13	141
14	TOLERANČNÍ ANALÝZA A SYNTÉZA OBVDŮ	142
14.1	PRINCIP	142
14.2	NÁHODNÝ CHARAKTER PARAMETRŮ PRVKŮ	144
14.3	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 14	147
15	ANALÝZA ŠUMU V ELEKTRONICKÝCH OBVODECH	148
15.1	ŠUM V ELEKTRONICKÝCH OBVODECH	148
15.1.1	Tepelný šum rezistoru	148
15.1.2	Tepelný šum u obecné impedance	149
15.1.3	Výstřelový šum	150
15.1.4	Blikavý šum	151
15.1.5	Kmitočtová závislost šumového výkonu	151
15.2	ŠUMOVÉ MODEL Y	151
15.2.1	Šumový model bipolárního tranzistoru	152
15.2.2	Šumový model unipolárního tranzistoru	153
15.2.3	Šumový model operačního zesilovače	154
15.3	DALŠÍ ŠUMOVÉ PARAMETRY	155
15.3.1	Šumová šířka pásma	155
15.3.2	Šumové číslo	156

15.3.3	<i>Míra šumu</i>	157
15.3.4	<i>Vlastní šumová teplota obvodu</i>	157
15.4	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 15	157
16	ZÁKLADY SYNTÉZY OBVODŮ	158
16.1	ÚVOD DO SYNTÉZY OBVODŮ	158
16.2	SYNTÉZA OBVODŮ RLC	159
16.2.1	<i>Imitanci funkce dvojpólů RLC</i>	159
16.2.2	<i>Vlastnosti pozitivně reálných funkcí</i>	160
16.2.3	<i>Imitanci funkce dvojpólů RC a RL</i>	161
16.2.4	<i>Imitanci funkce dvojpólů LC</i>	161
16.2.5	<i>Syntéza dvojpólů RLC</i>	162
16.2.6	<i>Rozklad pozitivně reálné funkce na řetězový zlomek</i>	162
16.2.7	<i>Rozklad pozitivně reálné funkce na parciální zlomky</i>	164
16.3	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 16	165
17	MODERNÍ ANALOGOVÉ OBVODY	166
17.1	OBVODY SE SPÍNANÝMI KAPACITORY	166
17.1.1	<i>Vlastnosti obvodů se spínanými kapacitami</i>	166
17.1.2	<i>Obvod SC simulující rezistor</i>	167
17.1.3	<i>Integrátory SC</i>	167
17.1.4	<i>Složitější obvody SC</i>	168
17.2	OBVODY SE SPÍNANÝMI PROUDY	168
17.2.1	<i>Vlastnosti obvodů se spínanými proudy</i>	168
17.2.2	<i>Základní paměťový blok SI</i>	169
17.2.3	<i>Integrátory SI</i>	169
17.2.4	<i>Složitější obvody SI</i>	170
17.3	OBVODY V PROUDOVÉM MÓDU	171
17.3.1	<i>Různé druhy pracovních módů</i>	171
17.3.2	<i>Přidružená transformace</i>	172
17.3.3	<i>Obvody s proudovými konvejory</i>	173
17.3.4	<i>Proudové integrátory</i>	175
17.3.5	<i>Univerzální vícefunkční filtry v proudovém módu</i>	176
17.4	KONTROLNÍ OTÁZKY Z KAPITOLY 17	176

Seznam obrázků

OBR. 1:	JEDNODUCHÉ OBVODY.	11
OBR. 2:	ZOBECNĚNÍ PROUDOVÉHO KIRCHHOFOVA ZÁKONA.	12
OBR. 3:	AKTIVNÍ OBVOD SE DVĚMA NEZÁVISLÝMI ZDROJI.	13
OBR. 4:	ŘEŠENÍ OBVODU DVĚMA NEZÁVISLÝMI ZDROJI NA ZÁKLADĚ PRINCIPU SUPERPOZICE.	14
OBR. 5:	ŘEŠENÍ OBVODU NA ZÁKLADĚ THÉVENINOVA TEORÉMU.	15
OBR. 6:	THÉVENINŮV TEORÉM.	15
OBR. 7:	NORTONŮV TEORÉM.	15
OBR. 8:	ŘEŠENÍ OBVODU DVĚMA NEZÁVISLÝMI ZDROJI NA ZÁKLADĚ THÉVENINOVA TEORÉMU.	16
OBR. 9:	ŘEŠENÍ OBVODU S ŘÍZENÝM ZDROJEM NAPĚTÍ NA ZÁKLADĚ NORTONOVA TEORÉMU.	17
OBR. 10:	ZÁVISLOST PŘENÁŠENÉHO VÝKONU NA HODNOTĚ ZATĚŽOVACÍHO ODPORU R_4	18
OBR. 11:	UKÁZKA APLIKACE TEORÉMU RECIPROCITY.	18
OBR. 12:	DVOJBRAN (A) JAKO PŘENOSOVÝ ČLÁNEK (B).	20
OBR. 13:	PASIVNÍ FILTR LC(R).	22
OBR. 14:	MODULOVÁ (A) KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA (B).	22
OBR. 15:	HODOGRAF PŘENOSU NAPĚTÍ.	23
OBR. 16:	NULOVÝ BOD V POČÁTKU (A) A ODPOVÍDAJÍCÍ MODULOVÁ CHARAKTERISTIKA (B).	24
OBR. 17:	REÁLNÝ ZÁPORNÝ PÓL (A). ODPOVÍDAJÍCÍ MODULOVÁ (B) A FÁZOVÁ (C) CHARAKTERISTIKA.	24
OBR. 18:	APROXIMACE A-V CHARAKTERISTIKY POLOVODIČOVÉ DIODY.	30
OBR. 19:	MODEL SETRVAČNÝCH VLASTNOSTÍ DIODY.	32
OBR. 20:	EBERSŮV - MOLLŮV MODEL BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.	33
OBR. 21:	GUMELLŮV-POONŮV MODEL BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.	34
OBR. 22:	JEDNODUCHÝ MODEL BJT SE ZÁKLADNÍMI DIFERENČNÍMI PARAMETRY.	35
OBR. 23:	DVOJBRANOVÝ MODEL S β -PARAMETRY.	35
OBR. 24:	DVOJBRANOVÝ MODEL S h -PARAMETRY.	36
OBR. 25:	GIACOLETTŮV MODEL BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.	36
OBR. 26:	URČENÍ PŘENOSOVÉ VODIVOSTI TRANZISTORU.	37
OBR. 27:	GIACOLETTŮV MODEL NA VF.	37
OBR. 28:	LOKÁLNÍ LINEÁRNÍ MODEL UNIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.	38
OBR. 29:	GLOBÁLNÍ MODEL UNIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.	38
OBR. 30:	REZISTIVNÍ MODEL REÁLNÉHO OZ.	40
OBR. 31:	JEDNOPÓLOVÝ MODEL REÁLNÉHO OZ.	40
OBR. 32:	NELINEÁRNÍ MODEL REÁLNÉHO OZ.	41
OBR. 33:	MAKROMODEL (5. ÚROVNĚ) REÁLNÉHO NAPĚŤOVÉHO OZ.	41
OBR. 34:	MODEL 6. ÚROVNĚ REÁLNÉHO OZ.	42
OBR. 35:	JEDNODUCHÝ PASIVNÍ OBVOD RLC (A) A JEHO TOPOLOGICKÝ ORIENTOVANÝ GRAF (B).	43
OBR. 36:	OBVOD SE DVĚMA SEPARÁTNÍMI ČÁSTMI (A) A JEHO TOPOLOGICKÝ GRAF (B).	44
OBR. 37:	ÚPLNÉ STROMY TOPOLOGICKÉHO GRAFU.	44
OBR. 38:	K POJMU ŘEZ TOPOLOGICKÉHO GRAFU.	46
OBR. 39:	FUNDAMENTÁLNÍ SOUBORY ŘEZŮ.	46
OBR. 40:	GRAF SE SOUBOREM NEZÁVISLÝCH SMYČEK.	47
OBR. 41:	ŘEŠENÍ OBVODU RLC METODOU SMYČKOVÝCH PROUDŮ.	48
OBR. 42:	VOLBA SOUSTAVY HLEDANÝCH NAPĚTÍ.	51
OBR. 43:	ŘEŠENÍ OBVODU RC METODOU UZLOVÝCH NAPĚTÍ.	52
OBR. 44:	MODEL OBVODU PŘI ÚPLNÉM ADMITANČNÍM POPISU SOUSTAVY.	55
OBR. 45:	POPIS SAMOSTATNÝCH VÍCEBRANŮ.	57
OBR. 46:	OBVOD OBSAHUJÍCÍ TRANSFORMÁTOR SE TŘEMI VINUTÍMI.	59
OBR. 47:	ZESILOVAČ SE DVĚMA TRANZISTORY.	60
OBR. 48:	OBVOD SE DVĚMA TRANZISTORY.	62
OBR. 49:	OBEČNÝ IMITANČNÍ DVOJBRANOVÝ KONVERTOR JAKO NEREGULÁRNÍ PRVEK VŮČI MUN.	64
OBR. 50:	ZVLÁŠTNÍ TYPY IMITAČNÍCH KONVERTORŮ.	65
OBR. 51:	ŘÍZENÉ ZDROJE JAKO NEREGULÁRNÍ PRVKY VŮČI MUN.	65
OBR. 52:	RŮZNÉ TYPY OPERAČNÍCH ZESILOVAČŮ, DLE ZAPOJENÍ BRAN.	66
OBR. 53:	PŘIPOJENÍ NEREGULÁRNÍHO PRVKU (IK) K REGULÁRNÍ ČÁSTI OBVODU.	66
OBR. 54:	DVĚ MOŽNOSTI TRANSFORMACE A REDUKCE NAPĚTÍ ZPŮSOBENÉ PŘIPOJENÍM IK.	67
OBR. 55:	DVĚ MOŽNOSTI TRANSFORMACE A REDUKCE PROUDŮ ZPŮSOBENÉ PŘIPOJENÍM IK.	68
OBR. 56:	OA-SISO PŘIPOJENÝ DO SOUSTAVY JAKO DVOJBRAN (A) NEBO TROJPÓL (B).	70
OBR. 57:	ZAPOJENÍ MODERNÍCH TYPŮ OA DO SOUSTAVY.	71
OBR. 58:	ZESILOVAČ S TRANZISTOREM A S IDEÁLNÍM TRANSFORMÁTOREM.	71

OBR. 59:	AKTIVNÍ DOLNÍ PROPUST RC S OPERAČNÍM ZESILOVAČEM.	72
OBR. 60:	JEDNODUCHÝ SYNTETICKÝ INDUKTOR (A) A JEHO NÁHRADNÍ SCHÉMA (B).	73
OBR. 61:	NEGATIVNÍ IMITANČNÍ KONVERTOR S OA-DISO.	73
OBR. 62:	YANGISAWŮV PŘENOSOVÝ DVOJBRAN S NEGATIVNÍM IK.	73
OBR. 63:	RIORDANŮV GYRÁTOR SE DVĚMA OA.	74
OBR. 64:	PŘIPOJENÍ DALŠÍHO PRVKU K REGULÁRNÍ SOUSTAVĚ.	75
OBR. 65:	INVERTUJÍCÍ ZESILOVAČ S OA.	77
OBR. 66:	TRANZISTOROVÝ ZESILOVAČ V ZAPOJENÍ SE.	78
OBR. 67:	ROZETNUTÍ OBVODU A JEHO SMÍŠENÝ POPIS.	78
OBR. 68:	PODSTATA GRAFŮ MC.	80
OBR. 69:	GRAFY MC NEJPOUŽÍVANĚJŠÍCH PRVKŮ.	81
OBR. 70:	TRANZISTOROVÝ ZESILOVAČ V ZAPOJENÍ V ZAPOJENÍ SE (A) A JEHO GRAF MC (B).	82
OBR. 71:	UPRAVENÝ GRAF MC TRANZISTOROVÉHO ZESILOVAČE (OBR. 70).	84
OBR. 72:	TRANSFORMAČNÍ GRAFY NEREGULÁRNÍCH PRVKŮ.	84
OBR. 73:	POUŽITÍ GRAFU T PRO ZÍSKÁNÍ VÝSLEDNÉHO GRAFU MC.	85
OBR. 74:	KONSTRUKCE GRAFU MC OBVODU S OZ.	85
OBR. 75:	KONSTRUKCE GRAFU MC OBVODU S IZN.	86
OBR. 76:	JEDNODUCHÝ PŘÍČKOVÝ ČLÁNEK (A) A JEHO GRAF M.	86
OBR. 77:	PASIVNÍ LCR FILTR PŘÍČKOVÉ STRUKTURY.	87
OBR. 78:	OBVOD S TRANSKODUKTORY.	88
OBR. 79:	SPOJENÍ PODOBVODŮ V SOUSTAVU.	89
OBR. 80:	MODEL SOUSTAVY KANONICKÉ STRUKTURY FLF-OS.	90
OBR. 81:	OBVOD 1. ŘÁDU S MINIMÁLNÍ FÁZÍ.	92
OBR. 82:	OBVOD 1. ŘÁDU S NEMINIMÁLNÍ FÁZÍ.	93
OBR. 83:	AKTIVNÍ OBVOD 4. ŘÁDU.	95
OBR. 84:	COLPITTSŮV OSCILÁTOR.	96
OBR. 85:	NYQUISTOVO KRITERIUM.	99
OBR. 86:	VYŠETŘOVÁNÍ STABILITY BODEHO KRITERIEM.	100
OBR. 87:	BLOKOVÉ SCHÉMA SOUSTAVY SE ZPĚTNOU VAZBOU.	100
OBR. 88:	VSTUPNÍ IMPEDANCE SOUSTAVY SE ZPĚTNOU VAZBOU.	103
OBR. 89:	VLIV ZPĚTNÉ VAZBY NA CHARAKTERISTIKY OBVODU.	103
OBR. 90:	TRANZISTOROVÝ ZESILOVAČ SE ZPĚTNOU VAZBOU.	104
OBR. 91:	PARAMETRY NELINEÁRNÍHO DVOJPÓLU.	107
OBR. 92:	URČOVÁNÍ PARAMETRŮ ŘÍZENÉHO NELINEÁRNÍHO DVOJPÓLU.	108
OBR. 93:	PRINCIP LINEARIZACE NELINEÁRNÍHO REZISTORU.	109
OBR. 94:	LINEARIZOVANÝ MODEL ŘÍZENÉHO NELINEÁRNÍHO REZISTORU.	109
OBR. 95:	LINEARIZACE NELINEÁRNÍHO DVOJBRANU.	110
OBR. 96:	ADMITANČNÍ MODEL BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU SE.	110
OBR. 97:	VÝSLEDNÁ A-V CHARAKTERISTIKA DVOU NELINEÁRNÍCH REZISTORŮ.	111
OBR. 98:	ODVOZENÍ PRŮBĚHU PROUDU V NEO METODOU TŘÍ ROVIN.	111
OBR. 99:	METODA ZATĚŽOVACÍ PŘÍMKY.	112
OBR. 100:	SESTROJENÍ PRACOVNÍ CHARAKTERISTIKY OBVODU S ŘÍZENÝM NELINEÁRNÍM REZISTOREM.	113
OBR. 101:	NELINEÁRNÍ SETRVAČNÝ OBVOD.	114
OBR. 102:	STATICÝ MODEL NELINEÁRNÍHO SETRVAČNÉHO OBVODU.	114
OBR. 103:	TRANZISTOROVÝ ZESILOVAČ SE (A) A JEHO MODULOVÁ CHARAKTERISTIKA (B).	115
OBR. 104:	STAVOVÁ TRAJEKTORIE.	116
OBR. 105:	NELINEÁRNÍ RLC OBVOD.	117
OBR. 106:	TYPICKÉ STAVOVÉ PORTRÉTY OBVODU 2. ŘÁDU.	118
OBR. 107:	STAVOVÉ TRAJEKTORIE A ODPOVÍDAJÍCÍ ČASOVÉ PRŮBĚHY STAVOVÝCH VELIČIN.	119
OBR. 108:	SROVNÁNÍ EKVIVALENTNÍHO A DIFERENCIÁLNÍHO PARAMETRU.	120
OBR. 109:	ŘEŠENÍ NEO METODOU TEČEN.	121
OBR. 110:	NELINEÁRNÍ OBVOD 1. ŘÁDU.	123
OBR. 111:	PŮSOBNÍ JEDNOHO HARMONICKÉHO NAPĚTÍ NA NELINEÁRNÍ REZISTOR.	124
OBR. 112:	MODIFIKOVANÉ BESSELOVY FUNKCE K-TÉHO ŘÁDU ARGUMENTU (bU).	125
OBR. 113:	APROXIMACE A-V CHARAKTERISTIKY LOMENOU PŘÍMKOU.	126
OBR. 114:	ČINITELÉ ROZKLADU V ZÁVISLOSTI NA POLOVIČNÍM ÚHLU OTEVŘENÍ.	127
OBR. 115:	PŮSOBNÍ NĚKOLIKA HARMONICKÝCH SIGNÁLŮ NA NELINEÁRNÍ REZISTOR.	127
OBR. 116:	REZONANČNÍ OBVOD RLC.	134
OBR. 117:	AKTIVNÍ FILTR RC SE DVĚMA ZESILOVAČI.	134
OBR. 118:	NAVRŽENÁ PÁSMOVÁ PROPUST RLC.	136

OBR. 119:	TOLERANČNÍ OBLAST V PROSTORU DVOU PARAMETRŮ.....	142
OBR. 120:	TOLERANČNÍ SYNTÉZA VE DVOUROZMĚRNÉM PROSTORU PARAMETRŮ.....	143
OBR. 121:	JEDNODUCHÝ DĚLIČ PROUDU (A) A DĚLIČ NAPĚTÍ (B).....	144
OBR. 122:	HISTOGRAM HODNOTY REZISTORŮ.....	144
OBR. 123:	ROZLOŽENÍ PRAVDĚPODOBNOTI HODNOTY R	144
OBR. 124:	GAUSSOVO ROZLOŽENÍ HUSTOTY PRAVDĚPODOBNOTI.....	145
OBR. 125:	DALŠÍ TYPICKÉ ROZLOŽENÍ HUSTOTY PRAVDĚPODOBNOTI.....	146
OBR. 126:	DVĚ NÁHODNÉ VELIČINY S NORMÁLNÍM ROZLOŽENÍM.....	146
OBR. 127:	VYSTŘEDĚNÍ TOLERANČNÍHO NÁVRHU.....	147
OBR. 128:	ŠUMOVÝ MODEL OBVODU.....	148
OBR. 129:	MODEL REÁLNÉHO ŠUMÍČÍHO REZISTORU.....	149
OBR. 130:	CHARAKTERISTICKÝ PRŮBĚH KMITOČTOVÉ ZÁVISLOSTI SPEKTRÁLNÍ ŠUMOVÉ HUSTOTY.....	151
OBR. 131:	POROVNÁNÍ ŠUMOVÝCH VLASTNOSTI VYBRANÝCH OPERAČNÍCH ZESILOVAČŮ.....	152
OBR. 132:	ŠUMOVÝ MODEL BIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU V ZAPOJENÍ SB.....	152
OBR. 133:	ŠUMOVÝ MODEL ZÁKLADNÍHO TRANZISTOROVÉHO STUPNĚ V ZAPOJENÍ SE.....	153
OBR. 134:	ŠUMOVÝ MODEL UNIPOLÁRNÍHO TRANZISTORU.....	154
OBR. 135:	ŠUMOVÝ MODEL REÁLNÉHO OPERAČNÍHO ZESILOVAČE.....	155
OBR. 136:	ŠUMOVÝ MODEL INVERTUJÍCÍHO ZESILOVAČE S OZ.....	155
OBR. 137:	K DEFINICI ŠUMOVÉ ŠÍŘKY PÁSMU.....	156
OBR. 138:	ANALÝZA A SYNTÉZA OBVODŮ.....	158
OBR. 139:	VÝVOJOVÝ DIAGRAM NÁVRHU OBVODŮ.....	159
OBR. 140:	JEDNODUCHÝ DVOJPÓL RC.....	161
OBR. 141:	JEDNODUCHÝ DVOJPÓL LC.....	162
OBR. 142:	PŘÍČKOVÝ ČLÁNEK DVOJPÓLŮ.....	163
OBR. 143:	EKVIVALENTNÍ OBVODY VZNIKLE ROZKLADEM $Z(s)$ DO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU.....	164
OBR. 144:	ZAPOJENÍ OBVODU ODPOVÍDAJÍCÍ VZTAHU (16.9).....	165
OBR. 145:	EKVIVALENTNÍ OBVODY VZNIKLE ROZKLADEM $Z(s)$ NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY.....	165
OBR. 146:	OBEČNÉ BLOKOVÉ SCHÉMA OBVODU SC.....	166
OBR. 147:	SPÍNANÝ EKVIVALENT R-SC.....	167
OBR. 148:	INTEGRÁTOR SC-FD.....	167
OBR. 149:	DALŠÍ TYPY INTEGRÁTORŮ SC.....	168
OBR. 150:	ZÁKLADNÍ PAMĚŤOVÝ BLOK SI.....	169
OBR. 151:	NEINVERUJÍCÍ (BEZEZTRÁTOVÝ) SI INTEGRÁTOR TYPU FD.....	170
OBR. 152:	ZTRÁTOVÝ SI INTEGRÁTOR TYPU FD.....	170
OBR. 153:	MODULOVÁ CHARAKTERISTIKA INTEGRÁTORU SI.....	171
OBR. 154:	PŘIDRUŽENÉ OBVODY V NAPĚŤOVÉM A PROUDOVÉM MÓDU.....	172
OBR. 155:	PŘIDRUŽENÉ AKTIVNÍ FUNKČNÍ BLOKY.....	172
OBR. 156:	TRANSFORMACE STRUKTURY BIKVADU ARC.....	173
OBR. 157:	AKTIVNÍ HORNÍ PROPUST RC 2. ŘÁDU V PROUDOVÉM MÓDU.....	173
OBR. 158:	TŘÍBRANOVÝ KONVEJOR CC II+ A JEMU PŘIDRUŽENÝ BLOK ICC II-v PROUDOVÉM MÓDU.....	174
OBR. 159:	VÍCEFUNKČNÍ FILTR 2. ŘÁDU S DVCC V NAPĚŤOVÉM A PROUDOVÉM MÓDU.....	174
OBR. 160:	MODULOVÉ CHARAKTERISTIKY UNIVERZÁLNÍHO FILTRU V PROUDOVÉM MÓDU.....	175
OBR. 161:	PROUDOVÝ INTEGRÁTOR S TRANSKONDUKTOREM.....	175
OBR. 162:	PROUDOVÝ INTEGRÁTOR S KONVEJOREM CC II.....	176

Seznam tabulek

TAB. 1:	PARAMETRY DIODY V KNIHOVNĚ PROGRAMU PSpICE.....	33
TAB. 2:	PARAMETRY TRANZISTORU V KNIHOVNĚ PSpICE.....	34
TAB. 3:	HODNOTY PARAMETRŮ β	36
TAB. 4:	HODNOTY PARAMETRŮ h	36
TAB. 5:	KASKÁDNÍ PARAMETRY NEREGULÁRNÍCH DVOJBRANŮ.....	77
TAB. 6:	ZÁKLADNÍ ROZDĚLENÍ ZPĚTNÝCH VAZEB.....	101
TAB. 7:	ROZDĚLENÍ ZPĚTNÝCH VAZEB DLE ZAPOJENÍ.....	102
TAB. 8:	. ZÁKLADNÍ PRAVIDLA PRO VÝPOČET RELATIVNÍCH CITLIVOSTÍ.....	133
TAB. 9:	HODNOTY PRVKŮ PÁSMOVÉ PROPUSTI PRO DVĚ SPECIFIKACE ZADÁNÍ.....	135
TAB. 10:	REALIZACE ELEMENTÁRNÍCH IMITANCÍ.....	163

1 Úvod

1.1 Zařazení předmětu ve studijním programu

Předmět *Teorie elektronických obvodů* (MTEO) je zařazen na FEKT VUT Brno, v magisterském studijním programu *Elektronika a radiová komunikace* (M-ERK), v zimním semestru 1. ročníku, jako povinný v oboru *EST* volitelný oborový předmět u TIT a mimooborový předmět u BEI.

Předmět MTEO úzce navazuje na základní teoretické předměty *Elektrotechnika 1 a 2*, *Analogové elektronické obvody* a *Signály a soustavy*. Jejich poznatky přímo využívá a dále rozvíjí. Pro jeho studium je zapotřebí dobrých předchozích znalostí z matematiky (komplexní proměnná a maticový počet), programů MATLAB, PSpice a SNAP. Znalosti z MTEO využijete v dalších oborových předmětech užší specializace, všude tam, kde se využívají analogové obvody a systémy.

1.2 Cíl předmětu

Studenti se seznámí s rozšířenými základy obecné teorie obvodů a systémů, s jejich aplikací na moderní elektronické obvody. Naučí se používat různé metody analýzy obvodů, včetně analýzy citlivostní, toleranční a šumové. Prohloubí si znalosti využití počítače k podpoře a řešení těchto úloh. Seznámí se s principy moderních netradičně pracujících obvodů a se základy syntézy a návrhem nejpoužívanějších elektronických obvodů. Získají další praktické dovednosti při měření typických elektronických obvodů.

1.3 Anotace předmětu

Modelování obvodových prvků a parazitních jevů v obvodech. Topologie elektronických obvodů. Obvodové funkce a parametry. Metody analýzy nelineárních a linearizovaných elektronických obvodů. Analýza obvodů s regulárními i neregulárními dvojbrany a mnohobrany. Maticové a grafové metody analýzy obvodů. Citlivostní toleranční a šumová analýza obvodů. Syntéza a návrh obvodů. Soustava obvodů a zpětné vazby. Analýza stability obvodů. Principy činnosti moderních netradičně pracujících obvodů.

1.4 Vstupní test

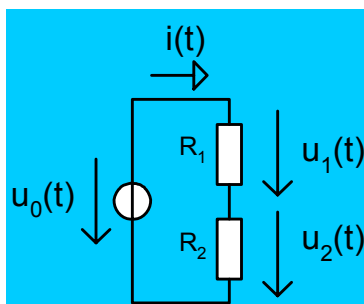
Na základě znalostí z předchozích předmětů odvoďte soustavu rovnic popisující následující jednoduché obvody. Použijte Kirchhofovy a prvkové rovnice (Ohmův zákon).

1. Lineární nesetrvačný obvod nultého řádu na **Obr.1a**.
2. Lineární setrvačný obvod prvního řádu na **Obr.1b**.
3. Nelineární nesetrvačný obvod nultého řádu na **Obr.1c**.

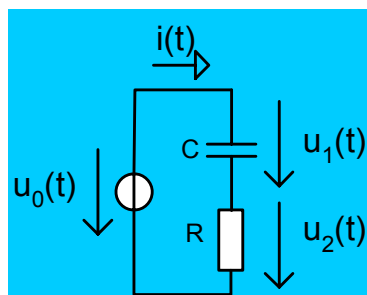
Dioda (D) je popsána rovnicí

$$i_D = I_D (e^{au_D} - 1) \quad (1.1)$$

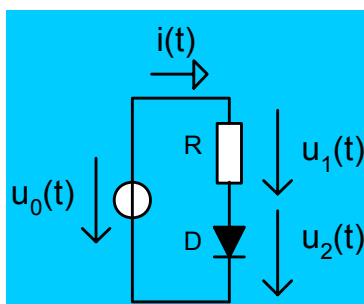
4. Setrvačný obvod prvního řádu na **Obr.1d**. Dioda je opět popsána rovnicí (1.1).
5. Výsledky zobecněte a vyslovte závěr jakými typy rovnic jsou popsány jednotlivé druhy obvodů.



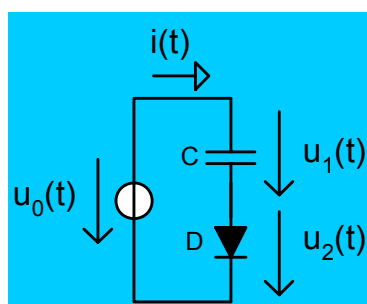
a)



b)



c)



d)

Obr. 1: Jednoduché obvody.

- | | |
|--|---|
| a) Lineární neseťvačný obvod nultého řádu. | b) Lineární setrvačný obvod prvního řádu. |
| c) Lineární neseťvačný obvod nultého řádu. | d) Nelineární setrvačný obvod prvního řádu. |

2 Elektronické obvody

Cíle kapitoly: Ukázat vzájemnou souvislost a neoddělitelnost mezi obvody a signály. Vysvětlit základní pojmy a dělení obvodů. Prohloubit znalosti studentů o zákonech, teorémech principech a jejich aplikaci v elektronických obvodech.

2.1 Základní pojmy a dělení obvodů

Elektronický obvod je prostorově ohraničená soustava (systém), který je schopen vytvářet, přenášet nebo přeměňovat analogový signál.

Obvod obsahuje navzájem propojené **obvodové prvky**. **Schéma** zapojení je přehledný obrazec reprezentující danou soustavu pomocí tzv. **schematických značek** (grafických symbolů) jednotlivých obvodových prvků.

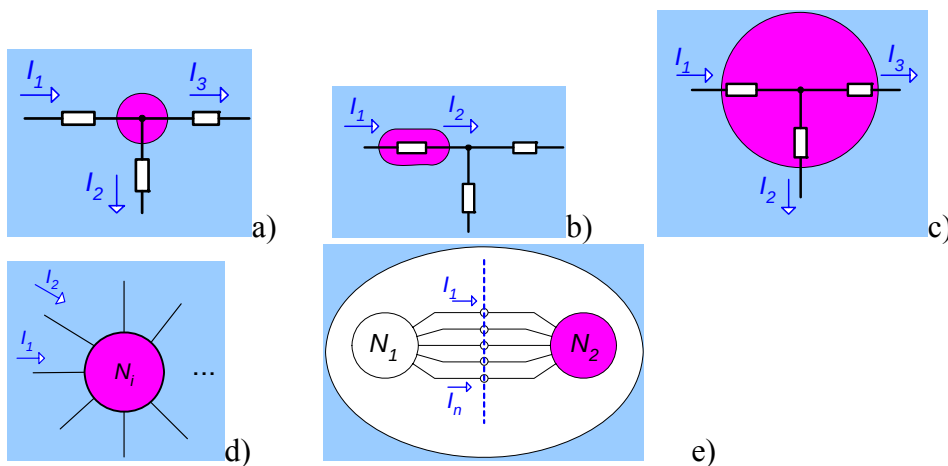
Ve své podstatě je většina reálných obvodů v elektronice **nelineární**. V řadě z nich však zpracováváme tak malé signály, že parametry součástek lze považovat za konstantní a obvod můžeme považovat za **lineární**. Mezi lineárními a nelineárními obvody je zásadní rozdíl, jak v chování a vlastnostech, tak i v přístupech k analýze a syntéze těchto obvodů.

U obvodů **lineárních** je přechodný děj vždy tlumený, trvá omezenou dobu, je dán vlastnostmi obvodu, počátečními podmínkami a buzením. Ustálený stav obvodu nezávisí na počátečních podmínkách. Spektrum signálu na výstupu je stejné jako na vstupu. Platí princip superpozice. Na něm jsou v podstatě založeny všechny efektivní metody analýzy těchto obvodů.

U obvodů **nelineárních** existuje několik ustálených stavů, paměť a hystereze, neplatí princip superpozice! Dochází zde ke změně spektra zpracovávaných signálů (přesun energie ve spektru). To dovoluje provádět v nich specifické operace a pracovní funkce (jako je např. usměrňování, směřování a j.).

2.2 Zákony a teorémy v elektronických obvodech

2.2.1 Proudový Kirchhoffův zákon a jeho zobecnění



Obr. 2: Zobecnění proudového Kirchhoffova zákona.

Věta 2.1

Zobecnění proudového Kirchhoffova zákona.

Na libovolném řezu, který rozděluje obvod na podobvody je nulová suma proudů tekoucích větvemi řezu.

Příklady aplikace této věty jsou uvedeny na **Obr. 2**.

2.2.2 Princip superpozice

Příklad 2.1 Aktivní obvod se dvěma nezávislými zdroji.

Uvažujeme aktivní obvod na **Obr. 3**. Určit máme výstupní napětí U_2 . Obvod je buzen dvěma nezávislými zdroji U_{01} a I_{01} .

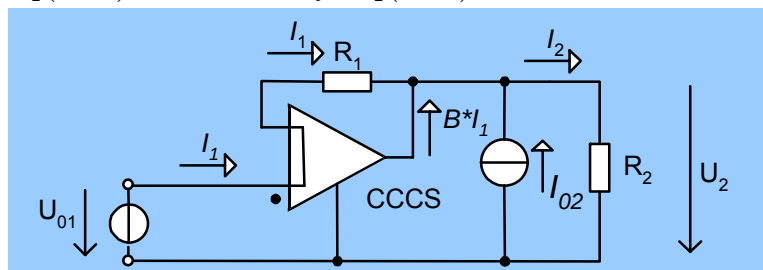
Řešení:

Výstupní napětí je dáno lineární kombinací příspěvků od obou zdrojů

$$U_2 = k_1 U_{01} + k_2 I_{02}, \quad (2.1)$$

kde

$$k_1 = \frac{R_2(1+B)}{R_1 + R_2(1+B)}, \quad k_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+B)}. \quad (2.2)$$



Obr. 3: Aktivní obvod se dvěma nezávislými zdroji.

Poznatek z předchozího příkladu lze zobecnit na libovolný lineární elektronický obvod.

Věta 2.2 Odezva obvodu na více budících signálů.

Jistá odezva (y) na vícenásobné buzení lineárního obvodu (x_i) je dána vztahem

$$y = \sum_{i=1}^N k_i x_{oi}, \quad (2.3)$$

kde k_i jsou konstanty závislé na parametrech součástek.

Příklad 2.2 Řešení obvodu na základě principu superpozice.

Ukážeme si jiný způsob řešení **Příklad 2.1** a to na základě principu superpozice znázorněného na **Obr. 4**.

Řešení:

- a) V obvodě na **Obr. 4a** deaktivujeme zdroj nezávislého proudu ($I_{02} = 0$, rozpojená větev) $\Rightarrow$ Obvod **A** (**Obr. 4b**), působí zde jen napěťový zdroj U_{01} . Jeho řešením dostáváme

$$U_{2A} = U_2|_{I_{02}=0} = \frac{R_2(1+B)}{R_1 + R_2(1+B)} U_{01}. \quad (2.4)$$

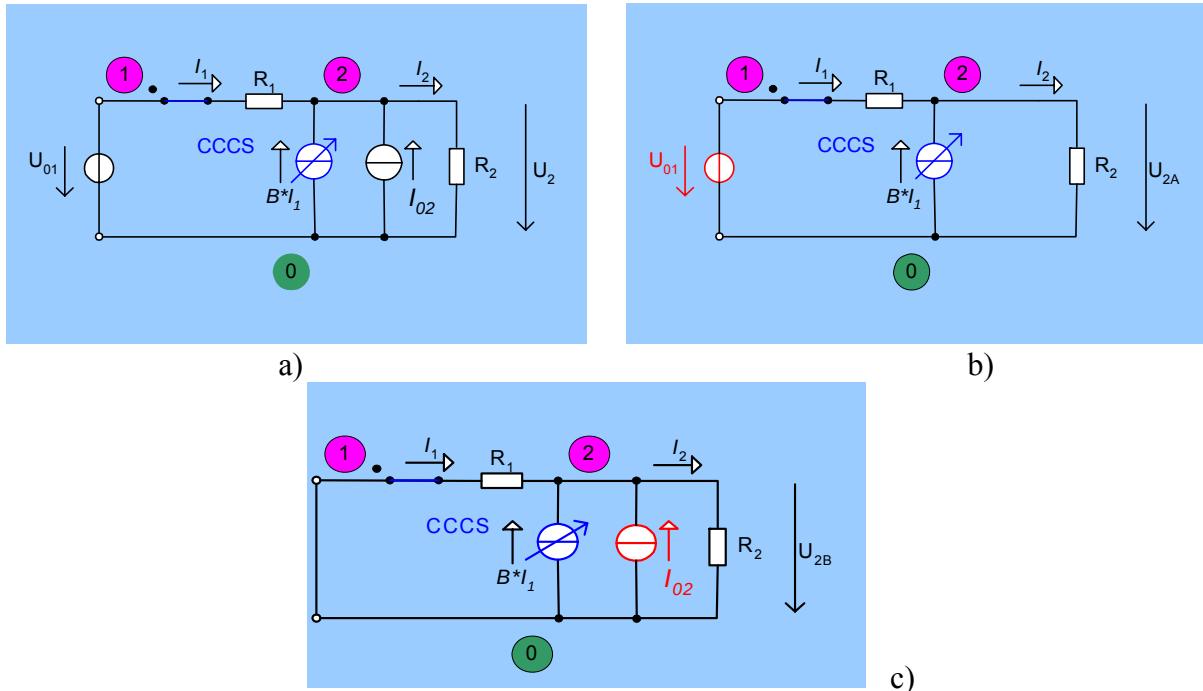
- b) V obvodě na **Obr. 4a** deaktivujeme zdroj nezávislého napětí ($U_{01} = 0$, zkrat této větve) $\Rightarrow$ Obvod **B** (**Obr. 4c**), působí zde jen zdroj proudu I_{02} . Řešením obvodu **B** dostáváme

$$U_{2B} = U_2|_{U_{01}=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+B)} I_{02}. \quad (2.5)$$

Výsledné výstupní napětí je pak dáno

$$U_2 = U_{2A}|_{I_{02}=0} + U_{2B}|_{U_{01}=0} . \quad (2.6)$$

Tento poznatek lze zobecnit na libovolný počet budících zdrojů.



Obr. 4: Řešení obvodu dvěma nezávislými zdroji na základě principu superpozice.

Věta 2.3 *Princip superpozice.*

Jistou odezvu v lineárním elektronickém obvodu řešíme postupně jako příspěvky od jednotlivých zdrojů, přičemž ostatní zdroje deaktivujeme.

2.2.3 Théveninův teorém

Příklad 2.3 *Řešení obvodu na základě Théveninova teorému.*

V **Příklad 2.1** (**Obr. 3**) uplatníme předchozí řešení s jinou interpretací. Do rovnice (2.1) dosadíme (2.2) a vytkneme společný člen

$$U_2 = \frac{R_2(1+B)}{R_1 + R_2(1+B)} \left[U_{01} + \frac{R_1}{1+B} I_{02} \right] . \quad (2.7)$$

Nyní definujeme

$$U_{0N} = U_{01} + \frac{R_1}{1+B} I_{02} = U_{01} + R_N I_{02}, \text{ kde } R_N = \frac{R_1}{1+B} , \quad (2.8)$$

a rovnici přepíšeme do jednoduššího tvaru

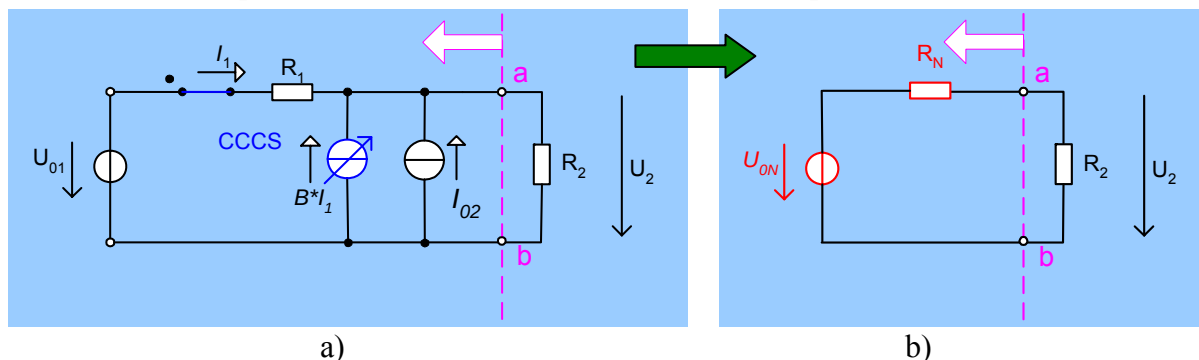
$$U_2 = \frac{R_2}{R_N + R_2} U_{0N} . \quad (2.9)$$

Tato rovnice (2.9) odpovídá obvodu (děliči) na **Obr. 5b**. To se dá interpretovat tak, že vše nalevo od brány **a-b** jsme nahradili jediným náhradním zdrojem napětí **U_{0N}** v sérii s náhradním odporem **R_N** . Tento výsledek se dá zobecnit v následující definici.

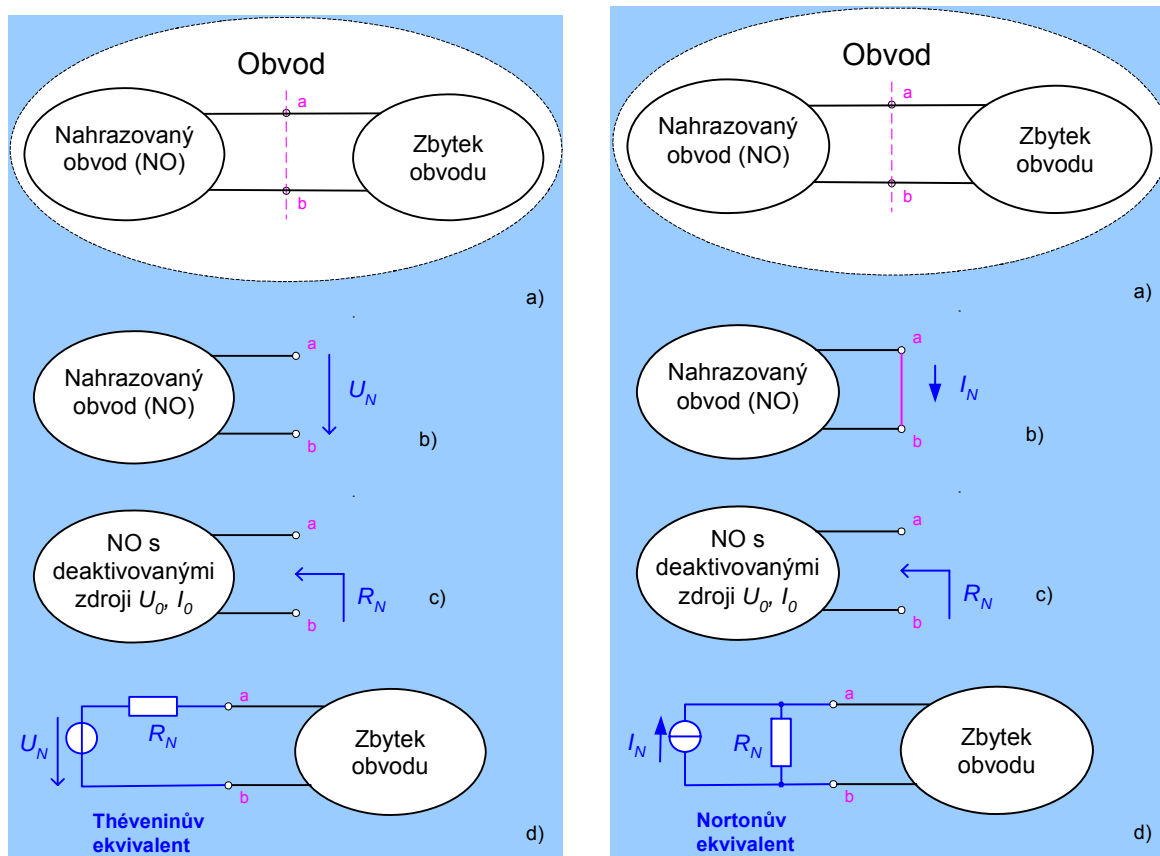
Věta 2.4 *Théveninův teorém.*

Libovolnou část lineárního obvodu na určité bráně $a-b$ (Obr. 6a) lze nahradit ekvivalentním obvodem (THE) sestaveným z jednoho náhradního zdroje napětí U_N v sérii s náhradním odporem R_N (Obr. 6d). Napětí U_N je dáno napětím na svorkách $a-b$ naprázdno (Obr. 6b). Odpor R_N je roven vstupnímu odporu nahrazovaného obvodu na svorkách $a-b$, když nezávislé zdroje jsou deaktivovány (Obr. 6c).

Tato definice se dá zobecnit i na lineární elektronický obvod s akumulačními prvky. Pak však budeme pracovat v harmonicky ustáleném stavu s impedancemi.



Obr. 5: Řešení obvodu na základě Théveninova teoremu.



Obr. 6: Théveninův teoreém.

Obr. 7: Nortonův teoreém.

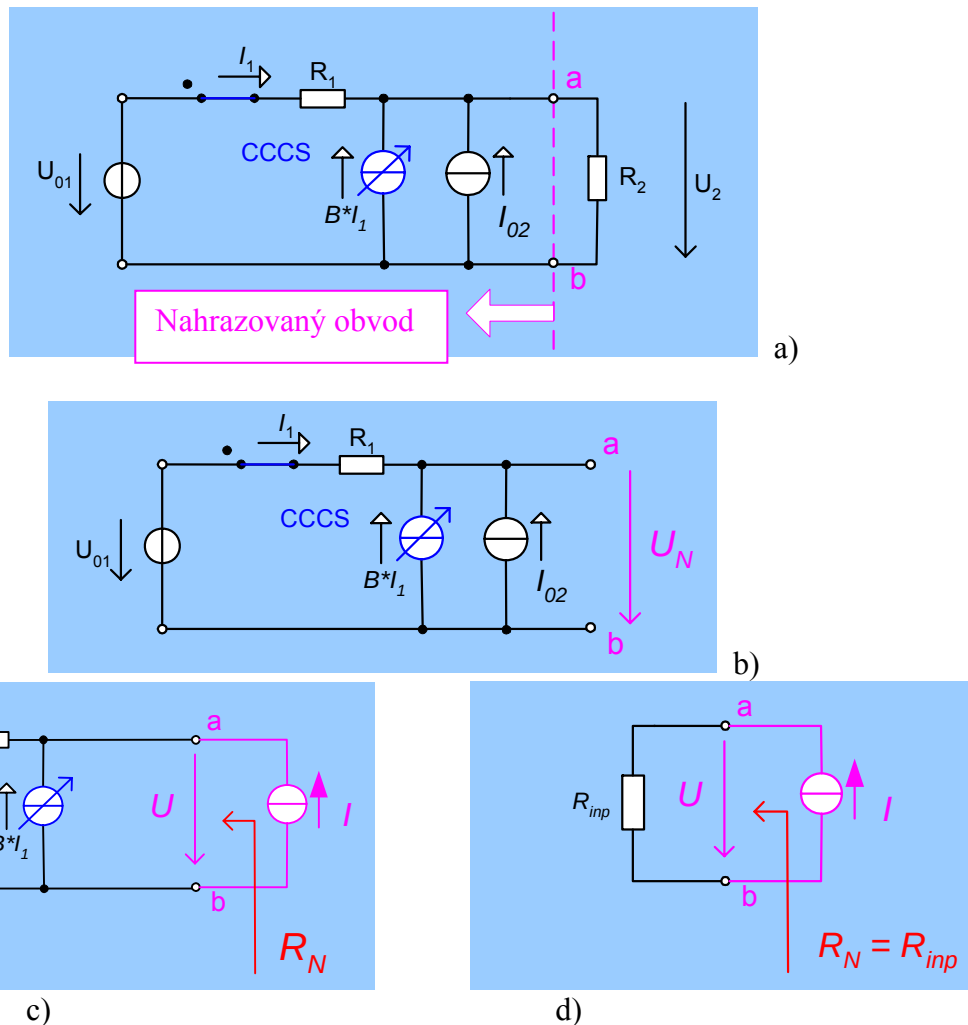
Příklad 2.4 Řešení obvodu na základě Théveninova teoremu.

Nyní budeme řešit **Příklad 2.1** (Obr. 3) s použitím Théveninova teoremu (Obr. 8).

Náznak řešení:

V prvním kroku řešíme napětí na svorkách ($a-b$) nahrazovaného obvodu naprázdno (**Obr. 8b**). V druhém kroku (**Obr. 8c**) deaktivujeme neřízené zdroje (napět'ový zdroj zkratujeme, proudový rozpojíme, řízený zůstává) a určujeme vstupní odpor do nahrazovaného obvodu. Protože v obvodě zůstává řízený zdroj, určíme vstupní odpor nepřímo. Na bránu $a-b$ připojíme externí doplňkový zdroj konstantního proudu I (**obr. 6c**) a odvodíme hodnotu napětí U vybuzeného na svorkách $a-b$. Z těchto dvou veličin (U a I) vypočteme hodnotu odporu

$$R_{inp} = R_N = \frac{U}{I} = \frac{R_1}{1+B} \quad (2.10)$$



Obr. 8: Řešení obvodu dvěma nezávislými zdroji na základě Théveninova teorému.

2.2.4 Nortonův teorém

Místo zdroje napětí U_N v sérii s odporem R_N je možno model nahradit ekvivalentním paralelním spojením R_N a zdroje proudu $I_N \Rightarrow$ *Nortonův ekvivalent*.

Věta 2.5 *Nortonův teorém*

Libovolnou část lineárního obvodu na určité bráně $a-b$ (**Obr.7a**) lze nahradit ekvivalentním obvodem (NOR) sestaveným z jednoho náhradního zdroje proudu I_N paralelně s náhradním odporem R_N (**Obr.7d**). Kde I_N je určen jako proud, který vytéká ze svorky (a) do svorky (b), při jejich zkratu (**Obr.7b**). Odpor R_N je roven vstupní rezistenci na bráně $a-b$, když všechny nezávislé zdroje jsou deaktivovány (**Obr.7c**).

I tato definice se dá zobecnit na elektronický obvod s akumulačními prvky. Pak opět budeme pracovat v harmonicky ustáleném stavu s impedancemi.

Mezi oběma modely (NOR a THE) je souvislost přes známou transformaci zdrojů. Tyto náhradní obvody jsou tedy duální. Platí následující vztahy

$$R_N^{NOR} = R_N^{THE} = R_N, \quad U_N^{THE} = R_N I_N^{THE}, \quad I_N = \frac{U_N}{R_N}. \quad (2.11)$$

Příklad 2.5 Řešení obvodu na základě Nortonova teorému.

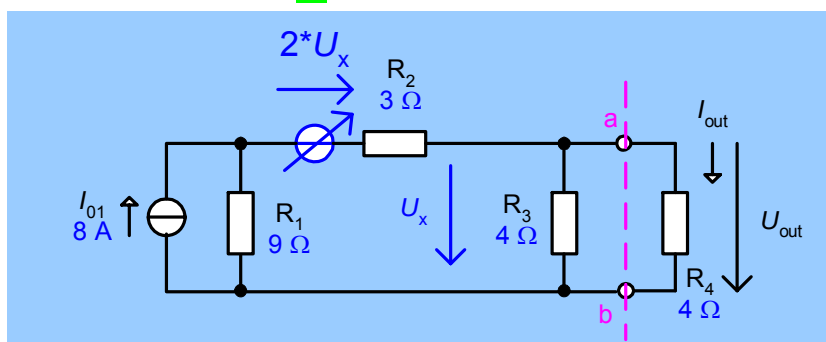
Pro obvod na Obr. 9 s řízeným zdrojem napětí (VCVS) určete na bráně $a-b$ Nortonův ekvivalentní model.

Náznak řešení:

V prvním kroku zkratujeme svorky ($a-b$) $\Rightarrow U_x = 0$, $\Rightarrow 2 \cdot U_x = 0$ a tedy i řízený zdroj VCVS zkratujeme. Dostáváme jednoduchý dělič proudu, kde proudy odpovídají příslušejícím vodivostem. Řešením dostáváme $I_N = 6 \text{ A}$. V druhém kroku, pro určení R_N přes vstupní odpor R_{imp} , deaktivujeme (rozpojením) neřízený zdroj proudu I_{01} . Řízený zdroj VCVS zůstává. Vstupní odpor do nahrazovaného obvodu určujeme opět nepřímo. Místo zátěže R_4 připojíme na bránu $a-b$ libovolný externí zdroj napětí U a odvodíme hodnotu proudu I . Z těchto U a I vypočteme hodnotu odporu $R_{imp} = R_N = 2 \Omega$. Získali jsme tak Nortonův model dle

Obr. 7d, kde zbytek obvodu

je tvořen jen zatěžovacím rezistorem R_4 .



Obr. 9: Řešení obvodu s řízeným zdrojem napětí na základě Nortonova teorému.

Pro tento obvod můžeme psát vztah

$$I_{out} = \frac{R_N}{R_N + R_4} I_{01} = \frac{2}{2 + R_4} 6. \quad (2.12)$$

Pro uvedenou hodnotu zátěže ($R_4 = 4 \Omega$) vychází ze vztahu (2.12) hodnota proudu $I_{out} = 4 \text{ A}$.

2.2.5 Teorém o přenosu maximálního výkonu

Příklad 2.6 Přenos maximálního výkonu.

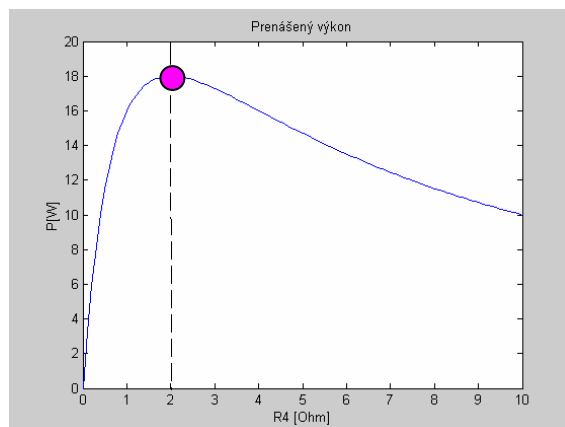
V předchozím Příklad 2.5 (Obr. 9) budeme uvažovat proměnou hodnotu zátěže (R_4). Určete přenos výkonu v závislosti na hodnotě odporu R_4 . Kdy bude přenášený výkon maximální?

Řešení:

Proud zátěži R_4 je dán vztahem (2.12) a tedy výkon v zátěži je

$$P = R_4 * I_{out}^2 = \frac{144 R_4}{(2 + R_4)^2} \quad (2.13)$$

Tento vztah je graficky znázorněn na **Obr. 10**. Z něj je vidět, že $P_{\max} = 18 \text{ W}$ je pro $R_4 = 2 \Omega$, kdy $R_4 = R_N$. Tento výsledek se dá zobecnit v následující definici.



Obr. 10: Závislost přenášeného výkonu na hodnotě zatěžovacího odporu R_4 .

Věta 2.6 *Teorém o přenosu maximálního výkonu.*

Maximální výkon je do zátěže přenášen tehdy když odpor zátěže (R_L) má stejnou hodnotu jako náhradní Théveninův resp. Nortonův odpor

$$R_L = R_N^{THE} = R_N^{NOR} = R_N, \quad \text{tehdy} \quad P_{MAX} = \frac{U_N^2}{4 R_N} = \frac{R_N I_N^2}{4}. \quad (2.14)$$

2.2.6 Teorém reciprocity

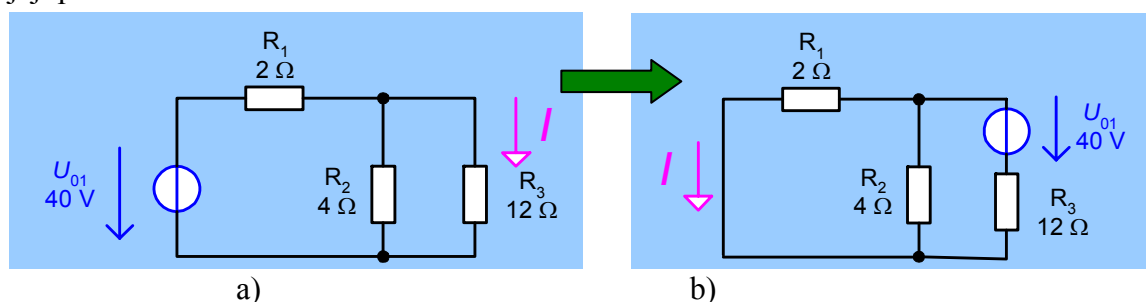
Věta 2.7 *Teorém reciprocity.*

Poměr odezvy (vybuzené $\underline{U}$ nebo $\underline{I}$) v jedné části lineárního elektronického obvodu k budicímu zdroji $\underline{U}_0$ nebo $\underline{I}_0$ je stejný, zaměníme-li místo odezvy a zdroje.

Tato definice neplatí v nelineárních obvodech a pro řízené (závislé) zdroje.

Příklad 2.7 *Aplikace teorému reciprocity.*

Uvedenou definici reciprocity (**Věta 2.7**) aplikujte na jednoduchý obvod na a dokažte její platnost.



Obr. 11: Ukázka aplikace teorému reciprocity.

Věta 2.8 *Chování nelineárního prvku.*

Chování libovolného nelineárního prvku v elektronickém obvodu je plně určeno jeho A-V charakteristikou, která může být určena testem mimo řešený obvod, bez bližších souvislostí s ostatními prvky obvodu, s kterými je vyšetřovaný prvek spojen.

2.3 Kontrolní otázky z této kapitoly

1. Vysvětlete proudový Kirchhoffův zákon, jeho zobecnění a ukažte jeho použití.
2. Vysvětlete princip superpozice. Jak deaktivujeme jednotlivé budicí zdroje?
3. Vysvětlete Théveninův teorém a ukažte jeho použití.
4. Vysvětlete Nortonův teorém a ukažte jeho použití.
5. Vysvětlete teorém o přenosu maximálního výkonu a ukažte jeho aplikaci.
6. Vysvětlete teorém reciprocit a ukažte jeho aplikaci.

3 Obvodové funkce a parametry

Cíle kapitoly: Seznámit se základními obvodovými funkcemi (přenosovými a imitančními), s jejich symbolickým tvarem, kmitočtovými charakteristikami, póly a nulovými body. Obvod zpracovávající signál jako dvojbran, jeho popis různými parametry (admitančními, impedančními, kaskádními a obrazovými).

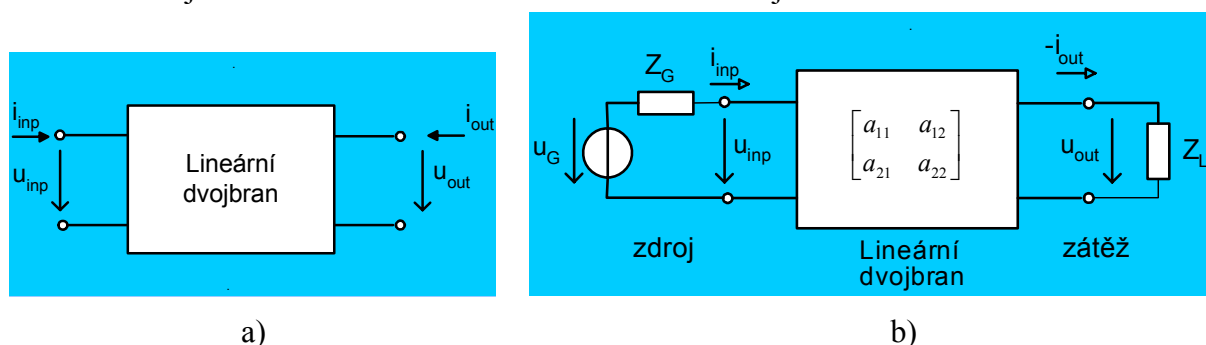
3.1 Základní obvodové funkce

Na elektronický obvod, který zpracovává určitý signál lze většinou pohlížet jako na dvojbran.

Věta 3.1 *Dvojbran.*

Dvojbranem (Obr. 12a) nazýváme soustavu obvodů, která je s vnějšími obvody spojena dvěma páry svorek (pólů) a přitom je zaručeno, že každý z těchto párů tvoří jednu **bránu**. Nejčastější triviální uspořádání je, že na vstupní bránu je připojen zdroj signálu a na výstupní bránu je připojena zátěž (Obr. 12b).

Předpokládejme nyní, že daný dvojbran je **lineární**. Vstupní a výstupní napětí jsou dána jako rozdíl příslušných uzlových napětí. Navíc proudy protékající oběma póly jedné brány až na znaménko jsou shodné. Není-li tomu tak obvod není dvojbranem!



Obr. 12: Dvojbran (a) jako přenosový článek (b).

Zavedeno je šest **obvodových funkcí** dvojbranu. Jsou to dvě **přenosové funkce**:

Přenos napětí při výstupu naprázdno

$$K_u = \left. \frac{U_{out}}{U_{inp}} \right|_{I_{out}=0} \quad (3.1)$$

Definovat lze přenos napětí i při určité hodnotě zátěže R_z na výstupu.

Přenos proudu při výstupu nakrátko

$$K_i = \left. \frac{-I_{out}}{I_{inp}} \right|_{U_{out}=0} \quad (3.2)$$

Opět lze definovat přenos proudu se zátěží na výstupu R_z . Pozor na znaménko a orientaci výstupního proudu!

Dále pak používáme čtyři **imitanční funkce**, z nichž dvě nazveme **bránové** a dvě **přenosové imittance**. Nejčastěji používaná *vstupní impedance naprázdno* je dána vztahem

$$Z_{inp} = \left. \frac{U_{inp}}{I_{inp}} \right|_{I_{out}=0} \quad (3.3)$$

Lze ji také definovat i při výstupu nakrátko nebo při určité hodnotě zátěže na výstupu. Obdobně je definována *výstupní impedance nakrátko*. Duálně jsou definovány bránové admitance. Z **přenosových imitancí** používáme *přenosovou impedanci* při výstupu naprázdno

$$Z_T = \left. \frac{U_{out}}{I_{inp}} \right|_{I_{out}=0} \quad (3.4)$$

Popřípadě duální *přenosovou admitanci* při vstupu nakrátko.

Každou obvodovou funkci libovolné soustavy linearizovaných obvodů je možné vyjádřit jako **racionální lomenou funkci**, tj. podíl dvou polynomů – čitatele (N) a jmenovatele (D), jenž jsou funkcemi zobecněné kmitočtové proměnné s (u nás někdy také značené jako p) a příslušných obvodových parametrů x

$$F(s, x) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s, x)}{D(s, x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j(x) s^j}{\sum_{k=0}^n b_k(x) s^k} \quad (3.5)$$

Funkce $F(s)$ jsou zobecněním funkcí $F(j\omega)$, které popisují obvod v kmitočtové oblasti. Obecně jsou definovány podílem Laplaceových obrazů odezvy $Y(s)$ a buzení obvodu $X(s)$.

Ze vztahu (3.5), při znalosti buzení $X(s)$ a obvodové funkce $F(s)$ lehce určíme obraz odezvy obvodu $Y(s)$. Pomocí inverzní Laplaceovy transformace můžeme pak vypočítat odezvu obvodu v časové oblasti $y(t)$.

$$Y(s) = F(s) \cdot X(s) \Rightarrow y(t) = LT^{-1}[Y(s)] \quad (3.6)$$

Všechny uvedené obvodové funkce lze vypočítat pomocí algebraických doplňků admitanční matice obvodu, jak si ukážeme v kapitole 6.3.3. Jednoduše je získáme počítačem podporovanou analýzou, například programem SNAP.

3.2 Kmitočtové charakteristiky

Každá obvodová funkce F je komplexní funkcí reálného kmitočtu f nebo ω , což se dá obecně vyjádřit následujícím vztahem

$$\dot{F}(\omega) = \text{Re}[\dot{F}(\omega)] + j \text{Im}[\dot{F}(\omega)] = F(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.7)$$

Z něj vyplývají čtyři **druhy kmitočtových charakteristik**. S kmitočtovou závislostí reálné a imaginární složky pracujeme jen zřídka. Zato k popisu obvodů hodně používáme **modulovou charakteristiku** $F(\omega)$ a **argumentovou charakteristiku** $\varphi(\omega)$.

Nejčastěji žádanou obvodovou funkcí je **přenos napětí** (3.1). **Modulová** kmitočtová charakteristika přenosu napětí je definována vztahem

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(\dot{K}(\omega))^2 + \text{Im}(\dot{K}(\omega))^2} \quad (3.8)$$

Zisk v decibelech (dB) pak

$$k(\omega) = K(\omega)_{dB} = 20 \log K(\omega) \quad (3.9)$$

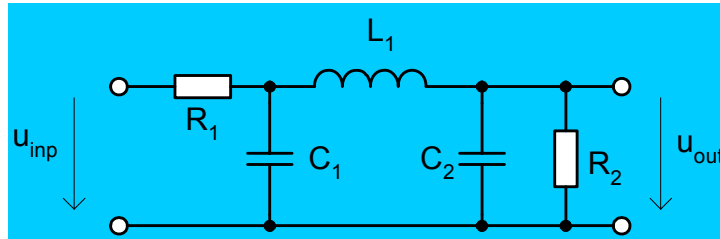
Argumentová (fázová) kmitočtová charakteristika přenosu napětí je definována vztahem

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im } \dot{K}(\omega)}{\text{Re } \dot{K}(\omega)} \quad (3.10)$$

Obdobně jsou definovány také imitanční obvodové kmitočtové charakteristiky.

Příklad 3.1 *Ilustrativní příklad - pasivní filtr.*

Uvedené pojmy si blíže ilustrujeme na příkladu lineárního obvodu, jehož schéma je uvedeno na **Obr. 13**. Jedná se o pasivní filtr LC(R) 3. řádu. Určete přenos napětí.



Obr. 13: Pasivní filtr LC(R).

Analýzou programem SNAP jsme získali přenos napětí v následujícím symbolickém tvaru (ve formě výpisu výsledků řešení z SNAP):

Network function: Voltage gain (open output)
symbolic

R2

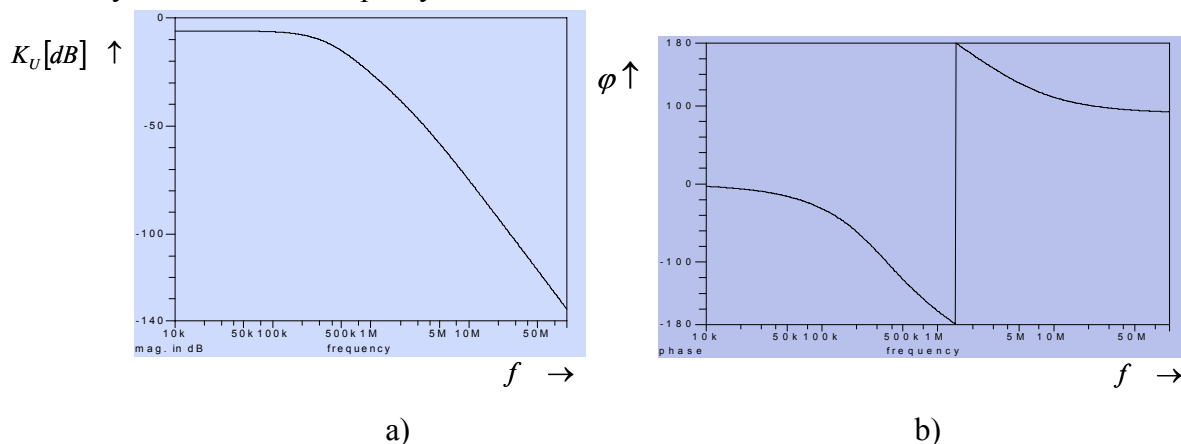
R2 + R1

+s*(L1 + R1*R2*C2 + R1*R2*C1)
+s^(2)*(R1*L1*C1 + R2*L1*C2)
+s^(3)*(R1*R2*L1*C1*C2)

Úpravou dostáváme hledaný výsledný vztah

$$K_U = \frac{R_2}{s^3(R_1 R_2 L_1 C_1 C_2) + s^2(R_1 L_1 C_1 + R_2 L_1 C_2) + s(L_1 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_2 C_1) + R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

Jmenovatel v (3.11) je polynom 3. řádu, což koresponduje s řádem obvodu, určeným třemi nezávislými akumulacími prvky.



Obr. 14: Modulová (a) kmitočtová charakteristika (b).

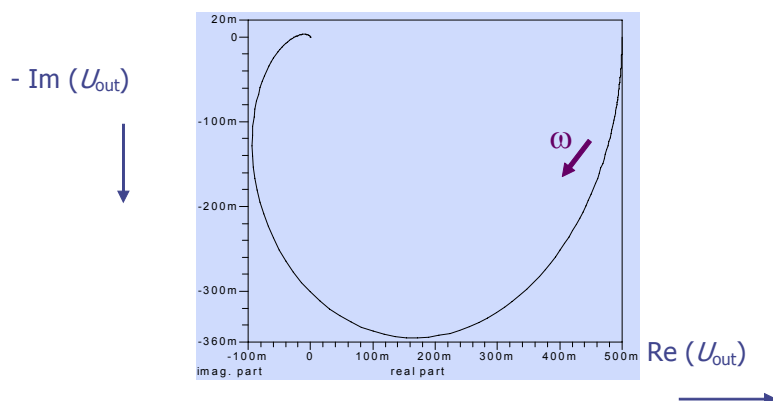
Obvodovým simulátorem **PSpice** (standardní AC analýzou), ale také i programem **SNAP** (numerickou nadstavbou symbolické analýzy), lehce získáme modulovou

charakteristiku na **Obr. 14a** a argumentovou charakteristiku na **Obr. 14b**. Na modulové charakteristice si všimneme, že má sklon **- 60 dB/dekáda**, což je dáno řádem obvodu (**n**). Obecně platí vztah (2.12a). Na argumentové charakteristice pak, maximální natočení fáze je určeno vztahem (2.12b), v našem případě **$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$** .

$$\text{Sklon} = n \cdot 20 \text{ dB/dekáda} \quad (3.12a)$$

$$\text{Fáze}_{\max} = n \cdot 90^\circ \quad (3.12b) \quad (3.12)$$

Někdy (zřídka) pracujeme s hodografem přenosu napětí na **Obr. 15**.



Obr. 15: Hodograf přenosu napětí.

3.3 Póly a nulové body

Libovolnou obvodovou funkci vyššího řádu lze postupně sestavovat z dílčích obvodových funkcí, nebo-li realizovat ji skládáním odpovídajících dílčích (jednodušších) podobvodů. Původní funkci (3.5) rozložíme na kořenové činitele

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j s^j}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = F_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_m)}{\prod_{k=1}^n (s-p_n)} \quad (3.13)$$

Ve vztahu (3.13) je počáteční hodnota obvodové funkce (počáteční přenos) dána

$$F_0 = \frac{a_0}{b_0} \quad (3.14)$$

Kořeny čitatele v (3.13) **z_j** nazýváme **nulovými body** a kořeny jmenovatele (3.13) **p_k** jsou **póly** obvodové funkce. Pro odborníka znalost jejich počtu, polohy (hodnoty) a případně migrace dávají dokonalý obraz o chování a vlastnostech obvodu.

Z rozložení pólů a nulových bodů můžeme sestavit aproximaci průběhu kmitočtových charakteristik. K průpravě nám budou sloužit následující příklady.

Příklad 3.2 Nulový bod v počátku.

Odvoďte modulovou a argumentovou charakteristiku obvodu s nulovým bodem v počátku (**Obr. 16a**).

Řešení:

Přenos **$K(s)$** takového obvodu je dán jednoduchým vztahem (3.15a). Dosazením za $s = j\omega$ dostáváme přenosovou funkci **$K(j\omega)$** (3.15b).

$$K(s) = K_0 s, \quad (3.15a) \quad K(j\omega) = K_0 j\omega. \quad (3.15b) \quad (3.15)$$

Modulovou kmitočtovou charakteristiku (vyjádřenou v decibelech) určíme aplikací obecného vztahu (3.9). Logaritmováním vztahu (3.15b) dostáváme rovnici

$$K(\omega)[dB] = 20 \log K_0 + 20 \log \omega$$

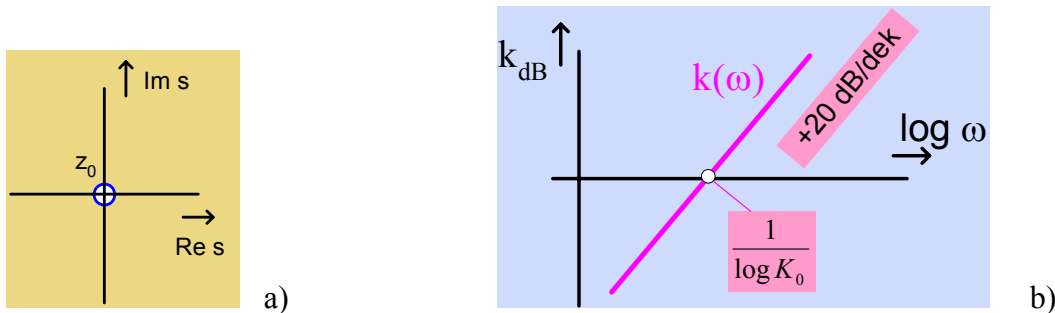
$$y = q + k \cdot x \quad (3.16)$$

což je přímka uvedená i s parametry na **Obr. 16**.

Argumentovou kmitočtovou charakteristiku určíme aplikací obecného vztahu (3.10)

$$\operatorname{Re} \dot{K}(\omega) = 0, \Rightarrow \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \dot{K}(\omega)}{\operatorname{Re} \dot{K}(\omega)} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2} \quad (3.17)$$

Natočení fáze je tedy konstantní o $+\frac{\pi}{2}$. Při nenulové počáteční fázi pak $\varphi(\omega) = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$.



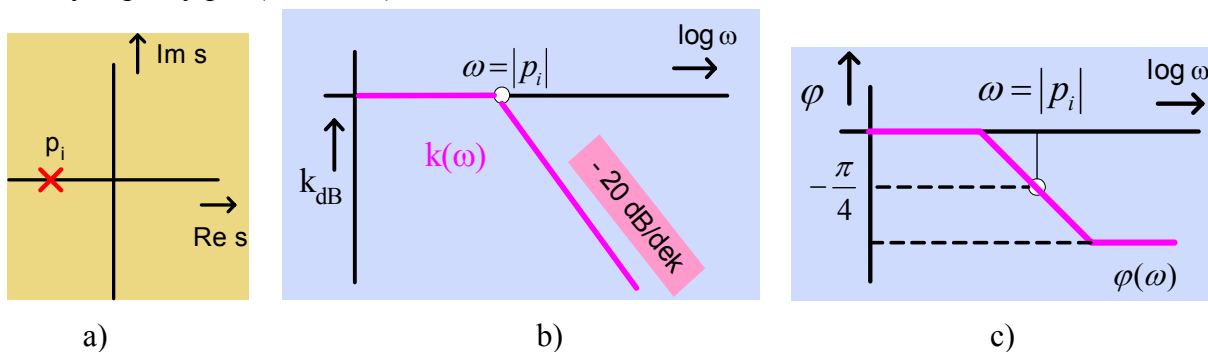
Obr. 16: Nulový bod v počátku (a) a odpovídající modulová charakteristika (b).

Příklad 3.3 Pól bod v počátku.

Odvoďte modulovou a argumentovou charakteristiku obvodu s pólem v počátku.

Příklad 3.4 Reálný záporný pól.

Odvoďte modulovou a argumentovou charakteristiku stabilního obvodu, který má reálný záporný pól (**Obr. 17a**).



Obr. 17: Reálný záporný pól (a). Odpovídající modulová (b) a fázová (c) charakteristika.

Náznak řešení:

Přenos $K(s)$ takového obvodu je dán vztahem

$$K(s) = \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)^{-1} \quad (3.18)$$

Z něj odvodíme vztah pro modulovou charakteristiku

$$K(\omega) = 20 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{p_i^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.19)$$

Grafické vyjádření tohoto vztahu je na **Obr. 17b**.

Pro argumentovou charakteristiku odvodíme

$$\varphi(\omega) = \arctg -\frac{\omega}{p_i}, \quad (3.20)$$

a průběh na **Obr. 17c**.

Příklad 3.5 Reálný nulový bod.

Odvodte modulovou a argumentovou charakteristiku obvodu, který má reálný nulový bod: a) kladný, b) záporný.

3.4 Maticové parametry dvojbranů

Regulární lineární obvod nebo jeho část (podobvod) lze vedle obvodových funkcí (kap. 0) popsat maticovými parametry ekvivalentního dvojbranu. Nejčastěji používanými jsou *admitančními parametry*

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Vedle toho můžeme použít parametry: *impedanční, hybridní a kaskádní* [5]. Mezi nimi existují transformační vztahy (tabulky), podle kterých je lze vzájemně přepočítat [5].

Obecně jakýkoliv lineární dvojbran (i neregulární) může být popsán *kaskádními* parametry v následujícím maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Pak vstupní impedanci dvojbranu zatíženého Z_L (**Obr. 12b**) lze pak vyjádřit vztahem

$$\dot{Z}_{imp} = \frac{\dot{a}_{11}\dot{Z}_L + \dot{a}_{12}}{\dot{a}_{21}\dot{Z}_L + \dot{a}_{22}}. \quad (3.23)$$

Obdobně jeho výstupní impedance je za předpokladu buzení ze zdroje signálu o vnitřní impedanci Z_G (**Obr. 12b**) dána

$$\dot{Z}_{out} = \frac{\dot{a}_{22}\dot{Z}_G + \dot{a}_{12}}{\dot{a}_{21}\dot{Z}_G + \dot{a}_{11}}. \quad (3.24)$$

Obvod složený z reciprokových prvků je sám taky *reciprokový*. Jeho imitační matice ($\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$) jsou souměrné podél hlavní diagonály ($y_{21} = y_{12}$). Platí pro něj taky $\det \mathbf{A} = 1$. Obvod bude *podélně impedančně souměrný*, když je reciprocitní a zároveň platí $y_{11} = y_{22}$, resp. $a_{11} = a_{22}$.

3.5 Obrazové parametry dvojbranů

Obrazové impedance (charakteristické, nebo také vlnové impedance) dvojbranu jsou definovány jako geometrický střed vstupních, resp. výstupních impedancí, je-li druhá brána jednou naprázdno a podruhé nakrátko, což označíme v indexu do závorky

$$\dot{Z}_{01} = \sqrt{\dot{Z}_{inp(0)} \dot{Z}_{inpt(\infty)}} , \quad (3.25a) \quad \dot{Z}_{02} = \sqrt{\dot{Z}_{out(0)} \dot{Z}_{out(\infty)}} . \quad (3.25b) \quad (3.25)$$

Po dosazení definičních vztahů (3.23) resp. (3.24), vychází pro obě obrazové impedance užitečné vztahy

$$\dot{Z}_{01} = \sqrt{\frac{\dot{a}_{11}\dot{a}_{12}}{\dot{a}_{21}\dot{a}_{22}}} , \quad (3.26a) \quad \dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{\dot{a}_{22}\dot{a}_{12}}{\dot{a}_{21}\dot{a}_{11}}} . \quad (3.26b) \quad (3.26)$$

Když se dvojbran zatíží na výstupní bráně (**Obr. 12b**) impedancí $\dot{Z}_L = \dot{Z}_{02}$ bude jeho vstupní impedance právě rovna obrazové impedanci Z_{01} a obdobně platí naopak. Je-li dvojbran zatížen na obou branách příslušnými obrazovými impedancemi, pak je *impedančně přizpůsoben* a na žádné z obou bran nenastávají odrazy a přenos výkonu bude maximální.

Je-li dvojbran *impedančně souměrný*, platí rovnost $\dot{a}_{11} = \dot{a}_{22}$ a obě obrazové impedance mají podle (3.26) stejnou hodnotu, takže pak platí vztah

$$\dot{Z}_0 = \dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{\dot{a}_{12}}{\dot{a}_{21}}} . \quad (3.27)$$

Velmi často jsou dvojbrany využívány jako *přenosové články* mezi zdrojem budicího signálu a zátěží (**Obr. 12b**). K popisu přenosových vlastností jsme v kap 0 definovali *přenos napětí* (3.1) a *přenos proudu* (3.2). Použít můžeme i *přenos výkonu*, nebo-li *činitel přenosu výkonu*

$$\dot{G}^{-1} = \dot{K}_u \dot{K}_i = \frac{\dot{U}_2(-\dot{I}_2)}{\dot{U}_1 \dot{I}_1} . \quad (3.28)$$

Při harmonickém buzení je to bezrozměrné komplexní číslo $\dot{G} = G e^{ja}$. V praxi se zavedlo jeho logaritmické vyjádření a nazývá se *míra přenosu výkonu*

$$\dot{g} = \frac{1}{2} \ln \dot{G} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2(-\dot{I}_2)} = b + ja , \quad (3.29)$$

kde b je *míra útlumu* (útlum), zatímco a je *míra posuvu*. Dříve se útlum vyjadřoval podle (3.29) v neperech [Np], dnes pomocí dekadického logaritmu v decibelech [dB]

$$b = 10 \log \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} , \quad [\text{dB}] . \quad (3.30)$$

Mezi těmito jednotkami platí převod: $1 \text{ Np} = 8,636 \text{ dB}$ nebo $1 \text{ dB} = 0,115 \text{ Np}$. Míra posuvu a se vyjadřuje buď v obloukové míře nebo ve stupních.

Pro impedančně přizpůsobený dvojbran přechází vztah (3.29) v definici *obrazové míry přenosu* (v přímém směru)

$$\dot{g}_{o1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2(-\dot{I}_2)} = b_{o1} + ja_{o1} . \quad (3.31)$$

Lze ji vypočíst pomocí následujících vztahů:

$$g_{o1} = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{02}}{Z_{01}} , \quad (3.32a) \quad \dot{g}_{o1} = \ln(\sqrt{\dot{a}_{11}\dot{a}_{22}} - \sqrt{\dot{a}_{12}\dot{a}_{21}}) . \quad (3.32b) \quad (3.32)$$

Obdobně definujeme obrazovou míru útlumu *ve zpětném směru* $\dot{g}_{o2}$. Tu lze vyjádřit pomocí $\dot{g}_{o1}$, a to

$$\dot{g}_{o2} = \dot{g}_{o1} - \ln(\det \mathbf{A}) , \quad (3.33)$$

kde $\det \mathbf{A}$ je determinant kaskádní matice $\mathbf{A}$. U recipročních dvojbranů je $\det \mathbf{A} = 1$, takže

$$\dot{g}_{o1} = \dot{g}_{o2} = \dot{g}_o . \quad (3.34)$$

Obrazová míra přenosu je u těchto dvojbranů stejná v obou směrech (i když dvojbran není souměrný). V tomto případě je možné zpětně vyjádřit jednotlivé kaskádní parametry pomocí obrazových impedancí a obrazové míry přenosu [5].

3.6 Kontrolní otázky z této kapitoly

1. Vysvětlete jak modelujeme dvojbranem určitý obvod přenášející signál. Definujte základní přenosové funkce lineárního dvojbranu.
2. Definujte základní imitanční funkce lineárního dvojbranu, reprezentujícího určitý obvod.
3. Jaké druhy kmitočtových charakteristik přenosu napětí znáte, jak jsou definovány. Jak souvisí jejich průběh s řádem obvodu?
4. Vysvětlete definici obecné obvodové funkce z matematického pohledu a její rozlad. Co jsou to nulové body a póly?
5. Vysvětlete souvislost mezi kmitočtovými charakteristikami a polohou nulového bodu (v počátku, reálný kladný a reálný záporný).
6. Vysvětlete souvislost mezi kmitočtovými charakteristikami a polohou pólu. (v počátku, reálný kladný a reálný záporný).
7. Definujte admitanční parametry dvojbranu, jako modelu regulárního lineárního dvojbranu. Kdy je obvod reciproký a kdy impedančně souměrný? Jaké další parametry dvojbranu znáte?
8. Definujte kaskádní parametry dvojbranu, jako modelu lineárního dvojbranu. Kdy je obvod reciproký a kdy impedančně souměrný? Jaké další parametry dvojbranu znáte?
9. Jak jsou definovány obrazové impedance dvojbranu? Kdy je obvod impedančně přizpůsoben?
10. Definujte pojmy: přenos výkonu, míra přenos výkonu, míra útlumu, míra posuvu.

Cíle kapitoly: Seznámit studenty s principy a filozofií modelování obvodových prvků. Modely různých úrovní nejpoužívanějších polovodičových prvků (dioda, BJT, FET) a moderních funkčních bloků (operační zesilovače, konvejory etc.), se zaměřením na použití těchto modelů v simulátoru.

V dnešní době, kdy máme k dispozici výkonné osobní počítače a profesionální programy pro analýzu a simulaci obvodů, je optimální modelování jednou ze základních kvalit inženýrské práce. Při analýze obvodů musíme, tak jako u každé fyzikální soustavy, některé nepodstatné jevy zanedbat, abychom úlohu vyřešili dostupnými prostředky za reálnou cenu, popřípadě aby výsledky nebyly zbytečně přehlcené balastem. Vytvoříme si model, v němž jsou uvažovány faktory, mající rozhodující vliv, za určitých podmínek a stupně idealizace

Při tvorbě modelu nutno brát v úvahu:

- Dále uvážíme:

- fyzikální podstatu prvků,
- požadovanou přesnost řešení,
- stupeň obtížnosti,
- účel řešení,
- programové vybavení.

• matematické modely	pro analytická nebo numerická řešení, bez mezi
• obvodové modely	kroku výpočtového schématu,
	• globální modely,
	popisují prvek v celé pracovní oblasti,
	• lokální modely,
• statické modely,	popisují prvek pouze v okolí pracovního bodu,
	parametry i obvodové veličiny jsou pouze reálné,
• dynamické modely,	parametry i obvodové veličiny jsou komplexní.

4.2 Aproximace nelineárních charakteristik

Nelineární charakteristiku $f(x)$, která je dána tabulkou, grafem, tolerančním polem nebo nevhodným analytickým výrazem, nahrazujeme aproximující funkcí $g(x)$ v intervalu $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, při čemž odchylka (chybová funkce) Δx nepřesáhne dovolenou hodnotu. **Kriteriem shody** (mírou přiblížení) může být maximální stejnoměrná nebo středně kvadratická odchylka. Aproximaci provádíme ve třech krocích - nejprve vybereme aproximující funkci $g(x)$, pak určíme její parametry (koeficienty) a nakonec zkoumáme shodu mezi aproximující funkcí $g(x)$ a charakteristikou $f(x)$.

V **izoextremální** (Čebyševově) **aproximaci** hledáme $g(x)$ ve tvaru polynomu n -tého řádu $F(x)$, při minimální hodnotě maximální odchylky. Vytýčíme-li toleranční kanál $f(x) \pm \varepsilon$, aproximující funkce $g(x)$ se kolem charakteristiky $f(x)$ vlní tak, že se izoextremálně dotkne hranice kanálu v $(n+2)$ bodech.

Máme-li k dispozici naměřené body (tabulku) charakteristiky $f(x)$ s výhodou použijeme **interpolační aproximaci**. Tehdy se aproximující polynom $F(x)$ shoduje s charakteristikou $f(x)$ v uzlech (bodech shody) x_k . Tyto uzly vybíráme z naměřených bodů. Koeficienty polynomu $F(x)$ určíme ze soustavy $(k = n)$ rovnic shody. Zjistíme zda maximální odchylka je menší než dovolená tolerance ε . Není-li tomu tak, zvýšíme řád polynomu.

Často se charakteristiky $f(x)$ aproximují v okolí pracovního bodu $Q[x_0, y_0]$ **Taylorovou řadou**, což je lokální maximálně plochá aproximace. Tehdy $F(x)$ a $f(x)$ mají v Q stejnou hodnotu a stejné hodnoty vyšších (n) derivací

$$F(x_0, \vec{a}) = f(x_0), \quad F^{(n)}(x_0, \vec{a}) = f^{(n)}(x_0) \quad (4.1)$$

Koeficienty polynomu $F(x)$ určíme ze známých vztahů

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad (4.2)$$

Vhodných aproximujících funkcí je celá řada (výběr je mnohoznačná úloha):

- **mocninový polynom** (s konstantními koeficienty a_n)

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n, \quad (4.3)$$

- aproximace přímkou - **linearizace** (první dva členy mocninového polynomu),

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (4.4)$$

- **transformovaný mocninový polynom**

(transformace souřadnic pro okolí pracovního bodu $Q[x_0, y_0]$)

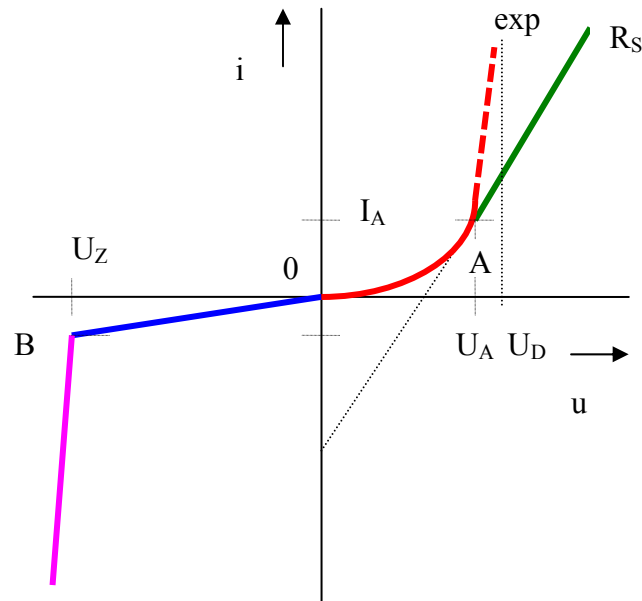
$$\hat{F}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 (x - x_0) + \hat{a}_2 (x - x_0)^2 + \hat{a}_3 (x - x_0)^3 + \dots + \hat{a}_n (x - x_0)^n, \quad (4.5)$$

- **exponenciální polynom**

$$F(x) = a_0 + a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + a_3 e^{b_3 x} + \dots + a_n e^{b_n x}, \quad (4.6)$$

- aproximace **exponenciálou** (4.7a), posunutou exponenciálou (4.7b), což je vhodné pro přechod P-N, exponenciálou transformovanou pro okolí pracovního bodu $Q[x_0, y_0]$ (4.7c)

$$y = a e^{bx}, \quad (4.7a) \quad y = a (e^{bx} - 1), \quad (4.7b) \quad \hat{y} = \hat{a} e^{\bar{b}(x-x_0)}. \quad (4.7c) \quad (4.7)$$



Obr. 18: Aproximace A-V charakteristiky polovodičové diody.

4.3 Lokální a globální modely

Linearizací charakteristik nelineárního dvojbranu v okolí pracovního bodu lze vytvořit **linearizovaný dvojbran**, jako vhodný **lokální model** původně nelineárního dvojbranu. Příkladem lokálního modelu tranzistoru je model s y-parametry. Takovéto modely nazýváme lokální, protože popisují prvek pouze v jistém pracovním bodě a jeho okolí. Využívají se při popisu obvodu **pro malé signály** a výrazně zjednodušují řešení obvodu.

Jiný obecnější typ modelů, které modelují daný prvek v celé pracovní oblasti, budeme nazývat **globálními**. Obecně jsou tyto modely nelineární. Mohou však být lineární, jejichž princip spočívá v aproximaci charakteristik v celé pracovní oblasti lomenými přímkami. Tuto soustavu lomených přímek pak vhodně obvodově modelujeme. Při tom vycházíme ze známých charakteristik ideálních i řízených rezistorů, zdrojů napětí, zdrojů proudu a ideálních diod pracujících jako spínače.

4.4 Modelování skutečné polovodičové diody

4.4.1 Podrobný rezistivní model polovodičové diody

Nejprve si ukážeme složitější, avšak jen rezistivní, model polovodičové diody, vhodný pro počítač (nesimuluje setrvačné vlastnosti). Takovýto model je použit i v obvodovém simulátoru PSpice. Vychází z podrobné vícenásobné aproximace A-V charakteristiky skutečné polovodičové diody na Obr. 18. Polovodičová dioda (přechod P-N) má v **propustném směru v okolí počátku** (na Obr. 18 červený úsek OA) ryze exponenciální A-V charakteristiku

$$\text{pro } 0 < u < U_A: \quad i = I_S (e^{a u} - 1), \quad I_S = I_S(v), a = a(v). \quad (4.8)$$

Emisní konstanta (I_S) a činitel teplotního napětí (a) jsou silně závislé na teplotě (v).

V bodě A se skutečná charakteristika začíná odchylovat od (červené) exponenciály (vliv úbytku na odporu polovodiče) a jednoduše ji nahradíme přímkou (na Obr. 18 zelený úsek)

$$\text{pro } u > U_A: \quad i = \frac{1}{R_S}(u - U_A) + I_A, \quad I_A = I_A(v). \quad (4.9)$$

V zjednodušených úvahách můžeme U_A nahradit difúzním napětím U_D .

V **závěrném směru** aproximujeme charakteristiku diody lomenou přímkou

$$\text{pro } U_Z < u < 0: \quad i = \frac{u}{R_p}, \quad R_p = R_p(v), \quad (4.10)$$

zde U_Z je Zenerovo napětí. Druhá část je pak

$$\text{pro } u < U_Z: \quad i = \frac{1}{R_Z}(u - U_Z) + I_B, \quad I_B = I_B(v). \quad (4.11)$$

4.4.2 Určování parametrů diody

Nejsou-li potřebné parametry dané diody v knihovně našeho simulátoru, můžeme je určit z bodů naměřené A-V charakteristiky. Některé simulátory mají k tomu zabudované pomocné programy (takový je např. Parts v PSpice).

V propustné oblasti při aproximaci exponenciálou a uvažování odporu lze psát rovnici

$$i_d = I_S [\exp(au_d - R_S i_d) - 1], \quad a = \frac{1}{mU_T}, \quad U_T = 25,855 \text{ mV}, \quad (4.12)$$

kde jsou tři neznámé I_S, m, R_S . Pro jejich určení potřebujeme tři rovnice. Napišeme tedy třikrát rovnici (4.12), pro tři body A-V charakteristiky. Tak odvodíme následující potřebné vztahy k určení neznámých parametrů:

- **emisní konstanta**

$$m = \frac{U_B - U_A}{U_T \ln\left(\frac{I_B}{I_A}\right)}, \quad (4.13)$$

- **odpor v propustném směru**

$$R_S = \frac{U_C - U_B - mU_T \ln\left(\frac{I_C}{I_B}\right)}{I_C - I_B}, \quad (4.14)$$

- **proud nasycení**

$$I_S = \frac{I_B}{\exp[a(U_B - I_B R_S)]}. \quad (4.15)$$

4.4.3 Jednoduchý model diody

V řadě případů, obzvláště při manuálních výpočtech, se spokojíme s hrubší aproximací charakteristiky diody lomenou přímkou a tomu odpovídajícímu jednoduchému modelu. Při **větších signálech** ($u \gg U_D \cong 0,7 \text{ V}$) lze difúzní napětí zanedbat a charakteristiku aproximovat

$$\text{pro } u > 0: \quad i = \frac{1}{R_S} u \quad (4.16a) \quad \text{pro } u < 0: \quad i = \frac{1}{R_p} u \quad (4.16b) \quad (4.16)$$

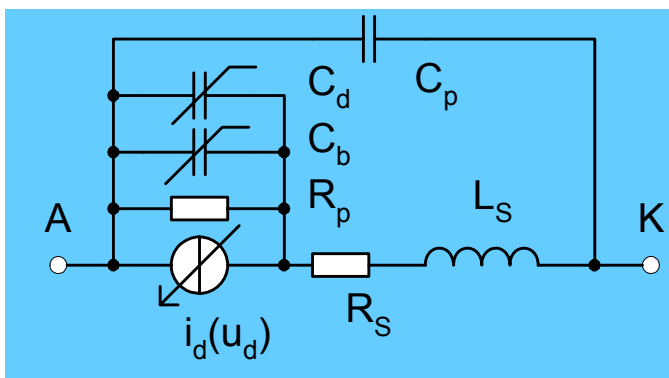
Diodu pak jednoduše modelujeme dvěma rezistory. Zanedbáme-li proud diody ve zpětném směru, rovnice i model se zjednoduší (vypustíme R_p)

$$\text{pro } u > 0: \quad i = \frac{1}{R_s} u \quad (4.17a) \quad \text{pro } u < 0: \quad i = 0 \quad (4.17b) \quad (4.17)$$

Pro **malé signály** musíme vzít v úvahu i difúzní napětí U_D , pak je vhodná aproximace na popsaná rovnicemi

$$\text{pro } u > U_D: \quad i = \frac{1}{R_s} (u - U_D) \quad (4.18a) \quad \text{pro } u < 0: \quad i = 0 \quad (4.18b) \quad (4.18)$$

Rovnicím (4.18) odpovídá obvodový model, tvořený sériovým spojením rezistoru R_s a napěťového zdroje U_D .



Obr. 19: Model setrvačných vlastností diody.

4.4.4 Modelování setrvačných vlastností diody

Pro rychlé signály (v oblasti vf) se začínají v diodě uplatňovat setrvačné jevy, které modelujeme akumulacími prvky L a C (**Obr. 19**), kterými doplníme rezistivní model uvedený v předchozí kapitole 4.4.1. Na **Obr. 19** je rezistivní model diody simulován řízeným zdrojem proudu $i_d = f(u_d)$.

V propustném směru se především uplatňuje **difúzní kapacita** C_d , projevující hromaděním nosičů náboje v oblasti přechodu P-N, kde náboje nedosáhnou okamžitě svůj ustálený stav. V závěrném směru jsou dynamické vlastnosti přechodu dány především **bariérovou kapacitou** C_b , která je nelineární a napěťově závislá, blíže viz. [11].

4.4.5 Specifikace parametrů diody

Podrobný model polovodičové diody je zabudován v obvodových počítačových simulátorech. V některých programech bývají jeho parametry implicitně zadány. Možno je však měnit a tak přizpůsobit výpočet danému skutečnému obvodu. Lepší simulátory mají knihovny běžných prvků od známých světových výrobců. Nejlépe je vybavena knihovna v simulátoru PSpice. V **Tab. 1** je uveden příklad specifikace parametrů diody v této knihovně.

4.5 Modelování bipolárního tranzistoru

Bipolární tranzistor je obecně **nelineární** dvojbran, který lze za určitých podmínek (zpracování malých signálů) v okolí pracovního bodu linearizovat a získat tak **lineární** lokální model.

Tab. 1: Parametry diody v knihovně programu PSpice.**MODEL D1N914/125C D**

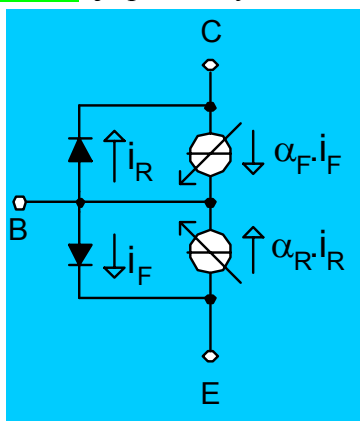
IS = 2.25833E-15	Saturation current
RS = 1.799439	Series resistance
N = 1.067043	Emission coefficient
TT = 1.46E-7	Transit time
CJO = 3.0177E-12	Zero-bias depletion capacitance
VJ = 0.4	Junction potential
M = 0.2147523	Junction gradient coefficient
EG = 1.11	Energy gap
XTI = 4.799594	Temperature exponent for Is
KF = 0	Flicker noise coefficient
AF = 1	Flicker noise exponent
FC = 0.764906	Forward bias depletion coefficient
BV = 94	Reverse breakdown voltage
IBV = 5E-6	Current at breakdown voltage

4.5.1 Globální nelineární modely bipolárního tranzistoru

Pro globální popis bipolárního tranzistoru NPN odvodili **Ebers** a **Moll** rovnice

$$\begin{aligned} i_E &= -i_F + \alpha_R i_R, & i_F &= I_{FS}(e^{a_{u_{BE}}} - 1), \\ i_C &= \alpha_F i_F - i_R, & i_R &= I_{RS}(e^{a_{u_{BC}}} - 1), \end{aligned} \quad (4.19)$$

kterým odpovídá nelineární model na **Obr. 20**. Zde I_{FS}/I_{RS} jsou saturační proudy přechodů, α_F/α_R je proudový zesilovací činitel v dopředném (zpětném) režimu.

**Obr. 20:** Ebersův - Mollův model bipolárního tranzistoru.

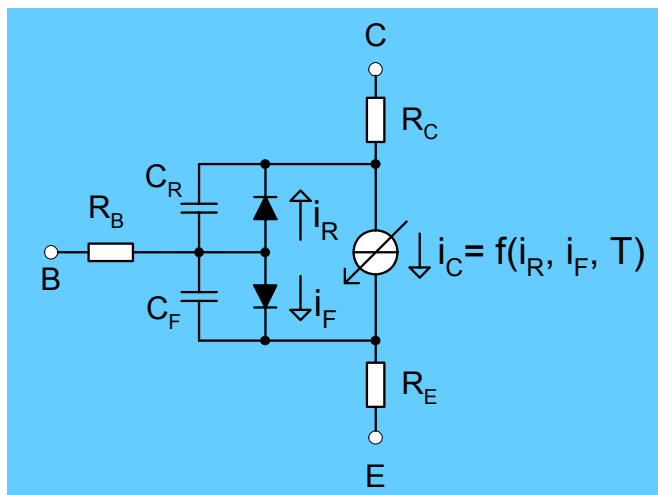
V **aktivním režimu** lze tento model zjednodušit. Dioda D_F je pólována v propustném směru. Model můžeme linearizovat a diodu nahradit rezistorem R_S a zdrojem napětí U_D . Dioda D_R je pólována v závěrném směru, proud I_{RS} lze zanedbat a diodu D_R vypustit. U kvalitních tranzistorů je zpětný přenos minimální a můžeme ho zanedbat ($\alpha_R \rightarrow \infty$), pak v modelu můžeme tento řízený zdroj vypustit.

Pro řešení obvodů s bipolárními tranzistory na počítači používáme **podrobný globální EM model**, který vznikl doplněním základního modelu o další jevy. V něm navíc uvažujeme:

- 1) Setrvačné vlastnosti simulují nelineární kapacity C_R , C_F (jako u diody).
- 2) Earlyho jev (sbíhání charakteristik) simuluje řízený nelineární rezistor R_{CE} .
- 3) Svodové odpory mezi elektrodami R_{CB} a R_{EB} .
- 4) Odpory otevřených přechodů R_{CC} , R_{EE} a R_{BB} .

Tyto sériové odpory použijeme jen výjimečně (neúměrně totiž narůstá počet uzlů v obvodě). Ve většině simulátorů jsou veškeré parametry tohoto modelu navíc teplotně závislé.

V některých programech (PSpice, MC4) je použit globální **model Gumellův-Poonův** (**Obr. 21**), který má pouze jeden zdroj proudu, avšak řízený dvěma proudy (v obou směrech). Podrobněji simuluje veškeré jevy v tranzistoru (i parazitní jevy vzhledem k substrátu). Podrobný Gumellův-Poonův model v obvodovém simulátoru PSpice obsahuje šest diod (dvě vzhledem k substrátu), tři rezistory a šest nelineárních kapacitorů. Kvazisaturační jev je simulován dalším řízeným zdrojem (VCCS). V programu PSpice model obsahuje 59 nastavitelných parametrů (řada z nich je však pro danou třídu tranzistorů stejná). Tento model dokonale postihuje i teplotní závislosti a šumové vlastnosti tranzistorů.



Obr. 21: Gumellův-Poonův model bipolárního tranzistoru.

4.5.2 Specifikace parametrů BJT

Na jednom příkladě evropského bipolárního tranzistoru **BC 107A** si ukážeme specifikaci jeho parametrů v knihovně Pspice (E bipolar.lib).

Tab. 2: Parametry tranzistoru v knihovně PSpice.

```
Library of European Bipolar Transistor Models
Small-Signal Bipolar Transistors
model BC107A NPN (Is=7.049f Xti=3 Eg=1.11 + Vaf=116.3 Bf=375.5 Ise=7.049f
Ne=1.281 Ikf=4.589 +Nk=.5 Xtb=1.5 Br=2.611 Isc=121.7p Nc=1.865 + Ikr=5.313
Rc=1.464 Cjc=5.38p Mjc=.329 Vjc=.6218 + Fc=.5 Cje=11.5p + Mje=.2717 Vje=.5
Tr=10n + Tf=451p Itf=6.194 Xtf=17.43 Vtf=10)
* PHILIPS pid=bc107a case=TO18
```

4.5.3 Lokální lineární modely BJT

Lokální lineární modely popisují bipolární tranzistor v okolí pracovního bodu a to jen pro malé signály (změny obvodových veličin).

Rozlišujeme je podle toho kolik obsahují řízených zdrojů:

- obsahují jeden řízený zdroj,
- obsahují dva řízené zdroje.

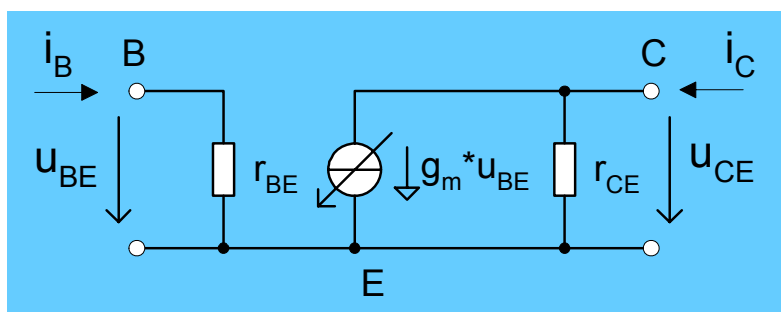
Další dělení:

- jednoduchý model se základními diferenčními parametry (g_m a r_i),
- modely s dvojbranovými parametry (z , y , h a j .),
- fyzikální modely s technologickými parametry.

Jednoduchý model vychází z linearizovaného popisu BJT se základními diferenčními parametry – přenosovou vodivostí g_m (strmostí S), odporů r_{CE} a r_{BE} , dle následující soustavy rovnic (4.20)

$$i_B = \frac{1}{r_{BE}} \cdot u_{BE}, \quad (4.20a) \quad i_C = g_m \cdot u_{BE} + \frac{1}{r_{CE}} \cdot u_{CE}, \quad (4.20b) \quad (4.20)$$

kde u , i jsou změny obvodových veličin, způsobené zpracováním signálů (někdy je označujeme Δu , Δi). Těmto rovnicím (4.20) odpovídá obvodový model na **Obr. 22**.

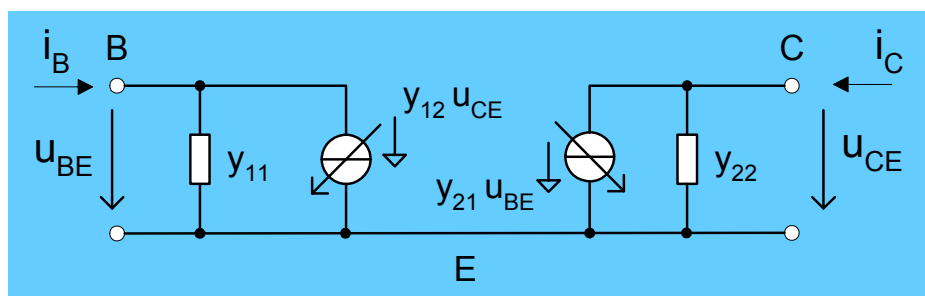


Obr. 22: Jednoduchý model BJT se základními diferenčními parametry.

Dvojbranové modely dělíme podle použitých parametrů:

- modely admitanční (**Y**) vhodné pro oblast VF (snadno se měří),
- modely impedanční (**Z**),
- modely hybridní (**H**) vhodné pro oblast NF,
- a další (**G, A, K**).

Použité **parametry** pro pomalé signály uvažujeme jako **reálné**, pro rychlé (vf) signály pak jako **komplexní**, čímž vhodně postihneme setrvačné vlastnosti tranzistoru. Hodnoty parametrů závisí nejen na typu tranzistoru, ale i na nastavení pracovního bodu. Dají se vzájemně přepočítat (existují přepočtové tabulky). Často lze některé parametry zanedbat a model zjednodušit.



Obr. 23: Dvojbranový model s y -parametry.

Nejpoužívanější dvojbranový model bipolárního tranzistoru, pro oblast vyšších kmitočtů a pro zapojení se společným emitorem, je **model s admitančními (y) parametry** na **Obr. 23**, který odpovídá rovnicím

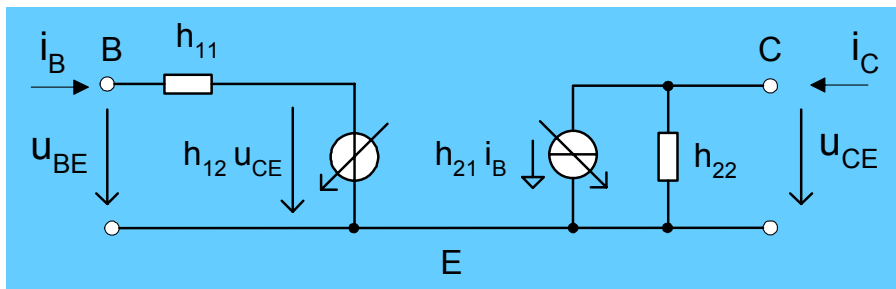
$$\begin{bmatrix} I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11e} & y_{12e} \\ y_{21e} & y_{22e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{BE} \\ U_{CE} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Pro ilustraci v Poznámenejme, že tyto parametry jsou různé pro různá zapojení tranzistoru: SE, SC, SB. Možný je jejich vzájemný přepočet. Nejpoužívanější jsou parametry měřené v zapojení SE.

Tab. 3 uvádíme příklad hodnot těchto parametrů. Poznamenejme, že tyto parametry jsou různé pro různá zapojení tranzistoru: SE, SC, SB. Možný je jejich vzájemný přepočet. Nejpoužívanější jsou parametry měřené v zapojení SE.

Tab. 3: Hodnoty parametrů y .

Tranzistor KC 147	$y_{11} = 450 \mu\text{S}$,	$y_{12} = -0,5 \mu\text{S}$,
Q: $U_{CE} = 6 \text{ V}$, $I_C = 1 \text{ mA}$	$y_{21} = 45 \text{ mS}$,	$y_{22} = 10 \mu\text{S}$.



Obr. 24: Dvojbranový model s h -parametry.

Pro oblast NF se lépe hodí dvojbranový model s hybridními (h) parametry na Obr. 24: Dvojbranový model s h -parametry.

, který odpovídá rovnicím

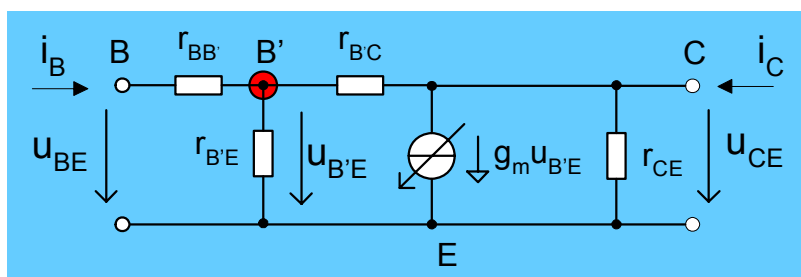
$$\begin{bmatrix} U_{BE} \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11e} & h_{12e} \\ h_{21e} & h_{22e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B \\ U_{CE} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

V **Tab. 4** opět uvádíme příklad hodnot těchto parametrů.

Tab. 4: Hodnoty parametrů h .

Tranzistor KC 507	$h_{11} = 4 \text{ k}\Omega$,	$h_{12} = 1,8 \cdot 10^{-4}$,
Q: $U_{CE} = 6 \text{ V}$, $I_C = 1 \text{ mA}$	$h_{21} = 310$,	$h_{22} = 27 \mu\text{S}$.

Vedle uvedených dvojbranových modelů se používají také **fyzikální lokální modely**, jejichž struktura je odvozena z fyzikální podstaty činnosti bipolárního tranzistoru. Tyto modely obsahují buď jeden nebo více řízených zdrojů. Jedním z nejčastěji používaných takovýchto modelů je **Giaiolettův model** na. Charakteristický je uzlem vnitřní báze (B'). Podobné jsou i lokální modely ve tvaru T-článku nebo Π -článku.



Obr. 25: Giauqueův model bipolárního tranzistoru.

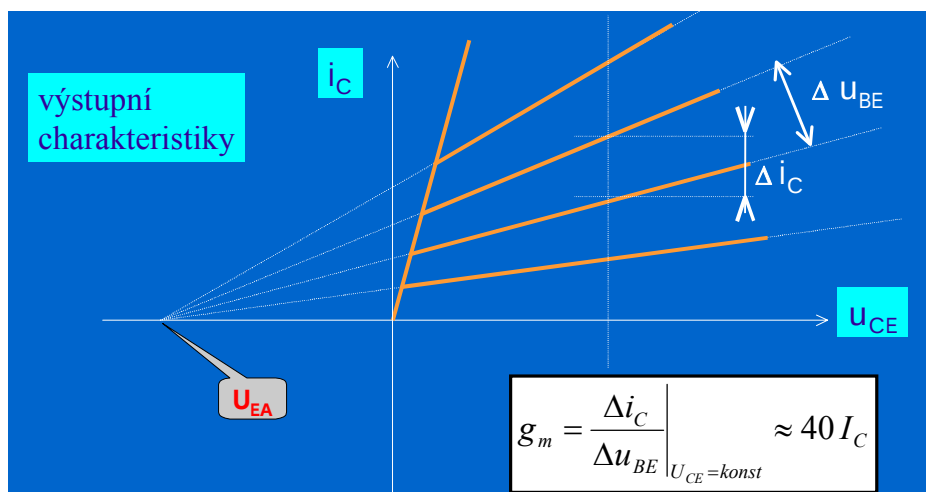
Diferenční parametry bipolárního tranzistoru, používané v uvedených lokálních modelech, můžeme určit graficko-početní metodou z naměřených charakteristik. Například přenosovou vodivost g_m (strmost tranzistoru) určíme ve výstupních charakteristikách tak, jak je naznačeno na **Obr. 26**. Ve výstupních charakteristikách určujeme i výstupní vnitřní odpor

tranzistoru r_{CE} . Obdobně ve vstupních charakteristikách určujeme vstupní odpor tranzistoru r_{BE} . Proudový zesilovací činitel β určujeme v charakteristikách proudových převodních.

4.5.4 Modelování BJT v oblasti VF

Na vlastnosti tranzistoru v oblasti vyšších kmitočtů mají zásadní vliv:

- setrvačné vlastnosti BJT (přenosu signálu),
- kmitočtová závislost proudových zesilovacích činitelů $\beta(\omega)$, $\alpha(\omega)$,
- parazitní kapacity C_{EB} , C_{CB} .

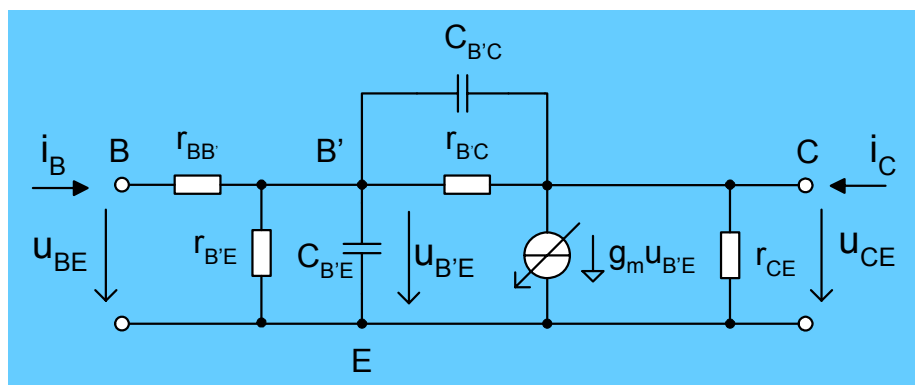


Obr. 26: Určení přenosové vodivosti tranzistoru.

Možnosti modelování:

- dvojbranové parametry uvažovat jako komplexní a kmitočtově závislé (doplnit imaginární složky),
- do obvodových modelů přidat akumulční prvky,
- použít k popisu rozptylové parametry,
- posuzování vf vlastností podle f_{mez} , t_{on} , t_{off} .

Doplnění modelů akumulčními prvky může ilustrovat na Giacolettově modelu (Obr. 25). Ten pro oblast vf doplňujeme parazitními kapacitami C_{BE} , C_{BC} tak, jak je uvedeno na Obr. 27. Obdobně lze doplnit i ostatní lokální rezistivní modely.



Obr. 27: Giacolettův model na VF.

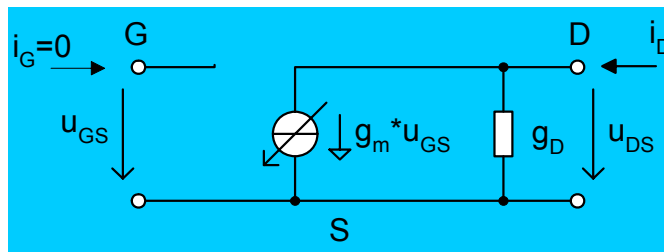
4.6 Modelování unipolárního tranzistoru

4.6.1 Lokální lineární model FETu

Polem řízený tranzistor (FET) obecně představuje nelineární, napětím (u_{GS}) řízený rezistor. V okolí klidového pracovního bodu ho lze linearizovat a nahradit lokálním modelem uvedeným na **Obr. 28**. Tento model vychází z popisu FET diferenčními parametry (g_D, g_T) pro malé změny obvodových veličin a vyjadřuje vztah

$$i_D = g_D \cdot u_{DS} + g_T \cdot u_{GS}. \quad (4.23)$$

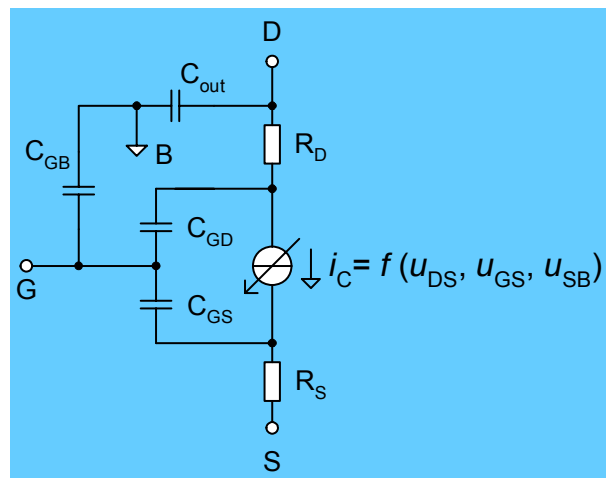
Pro oblast VF signálů model doplníme kapacitory (mezi elektrodami), modelujícími setrvačné vlastnosti tranzistoru. Podobně můžeme tento model doplnit dalšími prvky, simulujícími i parazitní jevy a to různě u tranzistorů MOSFET a JFET.



Obr. 28: Lokální lineární model unipolárního tranzistoru.

4.6.2 Globální nelineární model FETu

Pro velké signály lze FET v prvním přiblížení modelovat nelineárním řízeným zdrojem (**Obr. 29**) $i_D = f(u_{DS}, u_{GS}, u_{SB})$. Písmenem **B** je zde označen substrát (Basis). Model jako v předchozích případech doplníme rezistory R_S, R_D , upravující statické chování FETu. Setrvačné vlastnosti FETu, dané složitými mechanismy vytváření inverzního kanálu modelují kapacity C_{GD}, C_{GS} (ty jsou obecně jsou nelineární a napěťově závislé) a C_{GD} a C_{out} . Takovýto model na **Obr. 29** je jeden z mnoha používaných modifikací. Nazývá se podle svého autora **Shichmanův**. V podrobnějších modelech jsou ještě zahrnuty i jevy modulace délky kanálu a změny pohyblivosti nosičů náboje.



Obr. 29: Globální model unipolárního tranzistoru.

U **Shichmanova modelu** je řízený zdroj proudu popsán následujícími rovnicemi:

$$\begin{aligned}
 i_D &= 0, & \text{pro } u_{GS} < U_T, \\
 i_D &= \beta (1 + \lambda u_{DS}) (2U_{sat} u_{DS} - u_{DS}^2), & \text{pro } u_{GS} \geq U_T, \quad u_{DS} < U_{sat}, \\
 i_D &= \frac{\beta}{2} (1 + \lambda u_{DS}) U_{sat}^2, & \text{pro } u_{GS} \geq U_T, \quad u_{DS} \geq U_{sat}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Prahové napětí U_T a saturační napětí U_{sat} jsou dány následujícími vztahy

$$U_T = U_{T0} + \gamma \sqrt{\varphi + u_{SB}} - \gamma \sqrt{\varphi}, \quad U_{sat} = u_{GS} - U_T \tag{4.25}$$

Zde U_{T0} je prahové napětí při nulovém předpětí substrátu, γ je koeficient vlivu prostorového náboje substrátu, φ je povrchový potenciál substrátu, λ je činitel výstupní vodivosti (modeluje modulaci délky kanálu, jeho zkracování). Nejdůležitější parametr modelu, proudový činitel β je dán rozměry kanálu.

4.7 Modelování triody

Vakuová trioda se doposud používá v koncových stupních velmi výkonných komerčních vysílačů. **Lokální lineární model** je shodný s modelem FETu na **Obr. 28**. Jsou zde však použity jiné symboly (místo g_m je vžitá strmost S) a zkratky (**A**-anoda, **G**-mřížka, **K**-katoda). **Nelineární globální model** vychází ze známé („třípolovinové“) rovnice popisující anodový proud

$$i_A = k_1 * (v_{GK} + k_2 * v_{AK})^{3/2} \tag{4.26}$$

Tuto rovnici můžeme v PSpice modelovat odpovídajícími bloky ABM.

4.8 Modelování funkčních bloků

Nové technologie přinesly celou řadu nových funkčních bloků. S některými jsme se seznámili v BAEO [2]. Stává se, že tyto bloky zatím nenajdeme v knihovně svého obvodového simulátoru. Můžeme je popsat definičními vztahy a ty modelovat řízenými zdroji, případně jinými funkčními bloky, které jsou v daném nástroji k dispozici.

Jiná situace může nastat, když při studiu nějakého obvodu jsou výsledky, řečeno obrazně, zahlceny balastem a v něm zaniká studovaný jev. Do toho můžeme zahrnout i počáteční studium pro nás nového obvodu, kdy potřebujeme rychlá a jasná řešení, zda-li obvod plní očekávanou základní funkci.

Takovéto modely (1. úrovně) zidealizovaného funkčního bloku vyjadřují pouze jeho základní vlastnosti. Nejčastěji modelují tyto základní parametry:

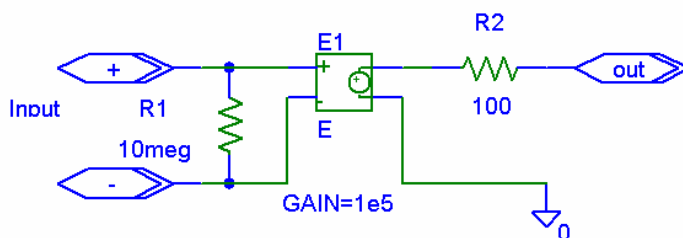
- napěťový (proudový) přenos (zisk),
- přenosové vodivosti (odpory).

Nepostihují žádné parazitní vlastnosti. Použijeme je při prvotních simulacích obvodů, ověřujících základní funkce a principy. Obsahují pouze řízené zdroje [2].

Až potom postupně složitějšími modely studujeme parazitní jevy v daném bloku. Proto jsme zavedli modely šesti úrovní. Blíže si to ukážeme na modelech nepoužívanějšího funkčního bloku - reálného napěťového OZ.

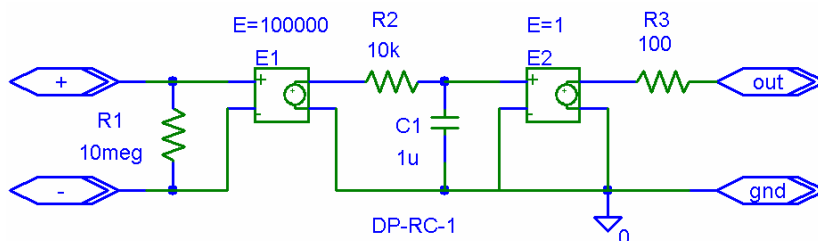
4.9 Modely reálného operačního zesilovače

Na **Obr. 30** je jednoduchý **rezistivní model** reálného napěťového OZ. Uvažujeme-li zde jediný reálný parametr a to je napěťový přenos $A_0 = 10^5$ (diferenční vstup s impedancí $Z_{inp} = \infty$ a symetrický výstup s $Z_{out} = 0$), modelujeme OZ jen pomocí zdroje napětí řízeného napětím (**E1**) s parametrem (gain) odpovídajícím A_0 . Jde tedy o nejjednodušší zidealizovaný model - **1. úrovně**. V modelu **2. úrovně** pak uvažujeme i vstupní a výstupní odpor s konkrétními hodnotami. Tyto parametry v PSpice můžeme variovat a studovat jejich vliv.



Obr. 30: Rezistivní model reálného OZ.

Model 3. úrovně, aproximující kmitočtovou závislost zesílení $A(f)$ reálného OZ s **jedním dominantním pólem**, odpovídající vztahu **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** je na **Obr. 31**. Zde zesílení má hodnotu $A_0 = 10^5$ a pól je na kmitočtu $f_0 = 16$ kHz. Kmitočtová závislost je simulována dolní propustí RC. Můžeme však použít i ABM bloky s definovaným Laplaceovým obrazem přenosu, např. v PSpice je blok ELAPLACE a tak simulovat i složitější závislosti (vícepólový model) Tyto modely používáme pro kmitočtovou (AC Sweep) i časovou (Transient) malosignálovou analýzu.



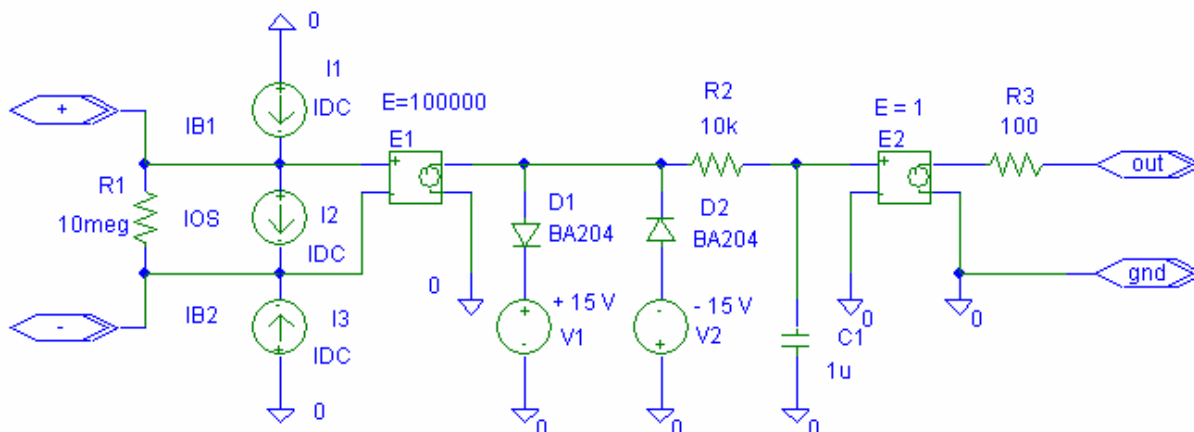
Obr. 31: Jednopolový model reálného OZ.

V některých případech, při zpracování větších signálů, nutno vzít v úvahu, že OZ je nelineární. Pracovní charakteristika vedle využívané lineární části má i dvě oblasti saturace. Lineární model nižší úrovně proto doplníme limitujícím nelineárním podobvodem. Příklad **nelineárního modelu 4. úrovně** reálného OZ je na **Obr. 32**. Vznikl doplněním jednopolového modelu (**Obr. 31**) dvěma diodami s předpětím, simulujícími omezení pracovní charakteristiky (saturaci OZ). Obvod je dále doplněn proudovými stejnosměrnými zdroji (I_{DC}), simulujícími proudovou (a nepřímo i napěťovou) nesymetrii vstupních obvodů OZ.

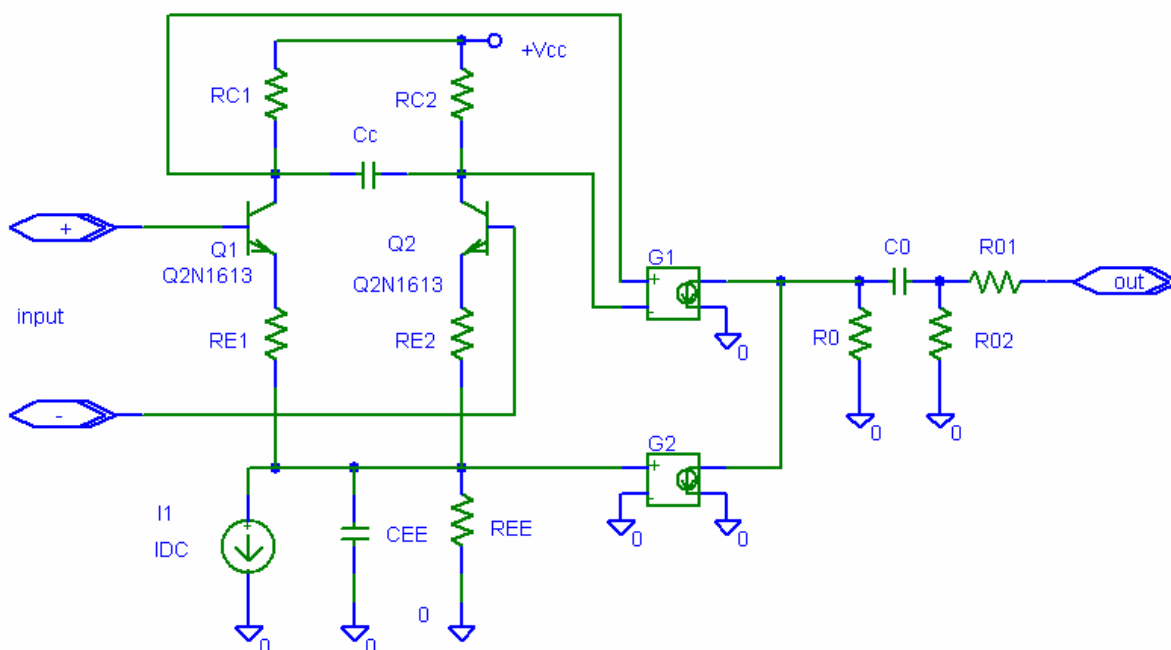
Profesionální **modely 5. úrovně** (makromodely) byly vytvořené pro výrobce profesionály. Charakteristické jsou tím, že důležité podobvody, které určují podstatné vlastnosti daného funkčního bloku se modelují podrobně na diskretní tranzistorové úrovni ostatní části ABM bloky a řízené zdroje. Makromodely od světových výrobců součástek jsou obsaženy v knihovně PSpice.

Model 5. úrovně reálného OZ je na **Obr. 33**. Zde je vstupní diferenční zesilovač modelován podrobněji tranzistorem. Další stupně pak pouze řízenými zdroji a RC prvky. Tento model dovoluje lépe simulovat vstupní impedanci, proudovou a napěťovou nesymetrii,

klidové proudy, nelineární pracovní charakteristiku vstup-výstup, diferenční i souhlasné zesílení i kmitočtové charakteristiky reálného OZ. V programu PSpice, je model z **Obr. 33** doplněn ještě dalšími prvky, simulujícími podružné parazitní jevy. Tento makromodel pak jako podobvod (.SUBCKT) najdeme v knihovně (LINEAR.LIB) v textové formě.



Obr. 32: Nelineární model reálného OZ.



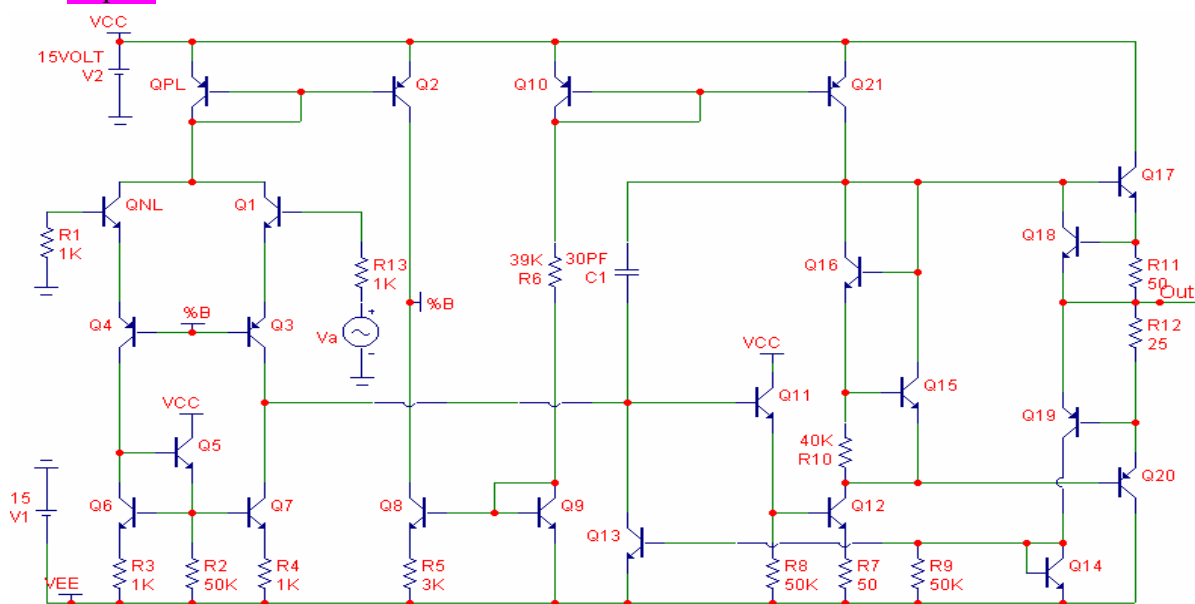
Obr. 33: Makromodel (5. úrovně) reálného napěťového OZ.

Nejvyšší, **6. úroveň**, modelování funkčních bloků je simulace (většinou na počítači) jejich skutečných podrobných zapojení, v diskretní tranzistorové podobě. Na **Obr. 33** je schéma zapojení standardního (napěťového) operačního zesilovače simulovaného v programu Microcap MC-6. Tyto modely pak dovolují určit nejen vnější obvodové funkce, ale i veškeré obvodové veličiny uvnitř bloku. Jejich tvorba i řešení je však náročnější.

4.10 Kontrolní otázky z kapitoly 4

1. Uveďte co vše je nutno uvážit při tvorbě modelu skutečné obvodové součástky.
Uveďte různé úrovně modelování a druhy modelů.

2. Vysvětlete účel a způsob aproximace nelineárních charakteristik, kriteria shody. Které funkce používáme nejčastěji k aproximaci nelineárních charakteristik.
3. Nakreslete obvodovou realizaci aproximace nelineární charakteristiky lomenou přímkou.
4. Jak je v obvodovém simulátoru podrobně aproximována A-V charakteristika polovodičové diody? Vysvětlete způsob určování parametrů diody aproximované exponenciálou.
5. Nakreslete VF model polovodičové diody, postihující i setrvačné vlastnosti.
6. Nakreslete a popište Gumell-Poonův model bipolárního tranzistoru.
7. Nakreslete a popište podrobný globální Ebersův-Mollův model bipolárního tranzistoru.
8. Nakreslete a popište Ebersův-Mollův model bipolárního tranzistoru zjednodušený pro normální aktivní režim.
9. Vysvětlete linearizaci bipolárního tranzistoru. Jaké lokální lineární modely používáme? Nakreslete a popište jednoduchý model bipolárního tranzistoru s diferenčními parametry g_m , r_{BE} , r_{CE} .
10. Nakreslete a popište lokální model bipolárního tranzistoru s y -parametry.
11. Nakreslete a popište lokální model bipolárního tranzistoru s h -parametry.
12. Nakreslete a popište Giacolettův model bipolárního tranzistoru.
13. Ukažte jak doplníme rezistivní model bipolárního tranzistoru pro oblast VF, aby model simuloval i setrvačné jevy.
14. Nakreslete a popište globální Shimanův model unipolárního tranzistoru (MOSFET).
15. Nakreslete a popište lokální model unipolárního tranzistoru (FET).
16. Nakreslete a popište jednopólový model (3. úrovně) standardního OZ.
17. Na modelu standardního OZ blíže ukažte vlastnosti nelineárních modelů (4. úrovně).
18. Na makromodelu standardního OZ blíže ukažte vlastnosti modelů 5. úrovně.
19. Nakreslete a popište jednopólový model (3. úrovně) standardního OZ.
20. Popište dva způsoby modelování kmitočtových závislostí reálného OZ v simulátoru PSpice



Obr. 34: Model 6. úrovně reálného OZ.

5 Topologie elektronických obvodů

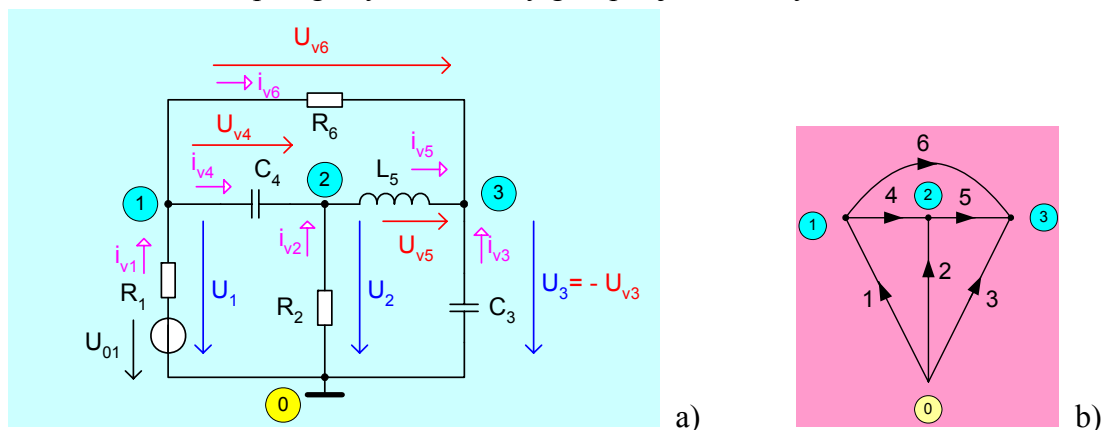
Cíle kapitoly: Seznámit studenty se základy topologie elektronických obvodů tak, aby pochopily algoritmizaci řešení obvodů na počítači a způsob přechodu od schématu k rovnicím popisujícím daný obvod v simulátoru.

5.1 Základní pojmy

Topologie je vědní obor (odvětví matematiky), zabývající se vlastnostmi geometrických obrazců, struktur a objektů. **Topologický graf** jako obraz obvodu vznikne ze schématu když, každý obvodový prvek nahradíme segmentem grafu. Dvojpól nahradíme větví (hranou = edge). **Uzel** je místo, ve kterém jsou spojeny svorky (póly) dvou nebo více dvojpólů či mnohopólů a zpravidla se označuje plným kroužkem. **Větev** představuje souhrn všech obvodových prvků zapojených mezi dvěma uzly a schematicky se znázorňuje čarou spojující tyto dva uzly. Pozn.: ideální zdroj proudu zapojený mezi dvěma uzly se z topologického hlediska nepovažuje za větev vzhledem k jeho nekonečně velké vnitřní impedanci. **Topologické schéma** obvodu je překreslené schéma globálního linearizovaného modelu celé soustavy tak, že jsou v něm uzly a větve nahrazeny jejich zjednodušenými značkami. **Uzlový pár** je tvořen libovolnou dvojicí uzlů. Větve, které jsou připojené k jednomu uzlovému páru, jsou tzv. paralelní větve. **Orientovaný graf** vynikne přiřazením určité orientace každé větvi pomocí šipky a může např. odpovídat orientaci napětí nebo proudů příslušných větví. **Smyčka** představuje posloupnost konečného počtu větví, které na sebe v jednotlivých uzlech navazují a tvoří uzavřenou dráhu. Lze ji též přisoudit určitou orientaci. **Vstupní (výstupní) uzel** je uzel s jedinou vystupující (vstupující) větví.

Příklad 5.1 Jednoduchý pasivní obvod.

Nakreslete topologický orientovaný graf pro jednoduchý obvod RLC na Obr. 35.



Obr. 35: Jednoduchý pasivní obvod RLC (a) a jeho topologický orientovaný graf (b).

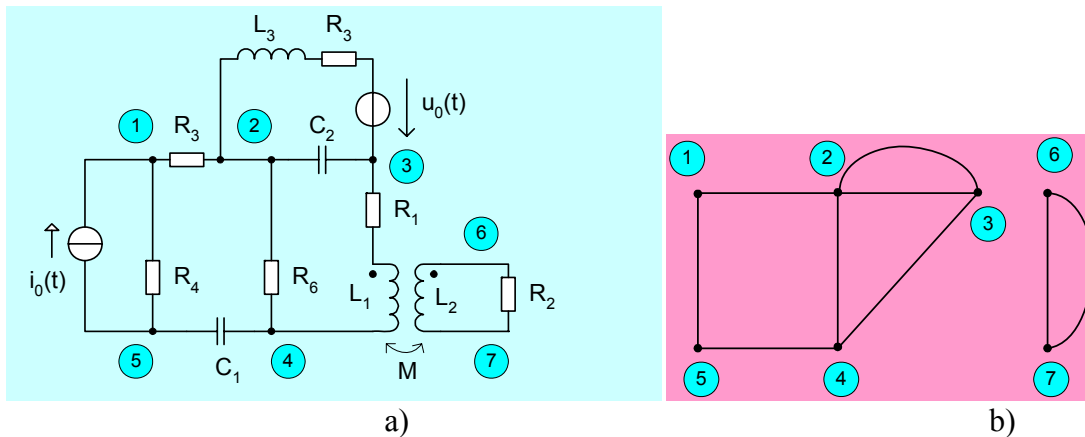
Náznak řešení:

Topologický (orientovaný) graf obvodu RLC na Obr. 35a je na Obr. 35b.

Separátní část je taková část soustavy obvodů, která není vodivě spojena s ostatními částmi soustavy (vazba mezi nimi je realizována např. magnetickým polem).

Příklad 5.2 Obvod se dvěma separátními částmi.

Nakreslete topologický graf obvodu se dvěma separátními částmi na Obr. 36a.



Obr. 36: Obvod se dvěma separátními částmi (a) a jeho topologický graf (b).

Náznak řešení:

Topologický graf (neorientovaný) obvodu se dvěma separátními částmi (**Obr. 36a**) je na **Obr. 36b**.

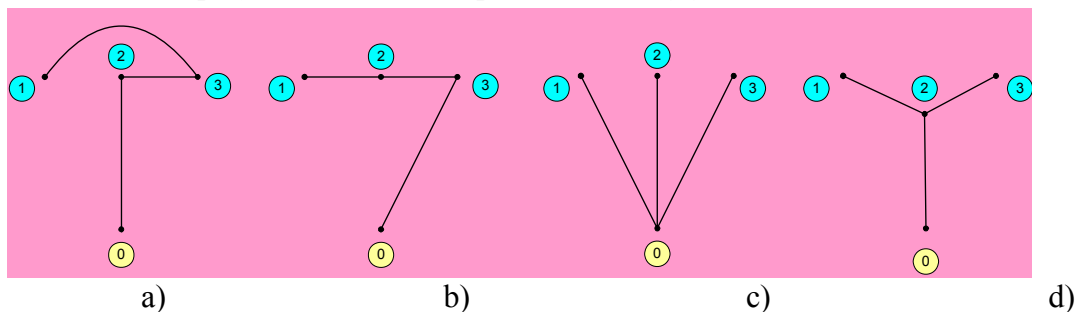
Úplný strom grafu tvoří větve, které navzájem spojují všechny uzly a při tom netvoří žádnou uzavřenou smyčku. Větviím úplného stromu se říká *závislé větve* nebo *haluze*. Větve, které nejsou součástí zvoleného úplného stromu, se nazývají **hlavní (nezávislé) větve** nebo *tětiny*. Přidáním jedné nezávislé větve k úplnému stromu soustavy vznikne *nezávislá smyčka*.

Příklad 5.3 Úplné stromy grafu.

Pro topologický graf v **Příklad 5.1** nakreslete různé stromy.

Řešení:

Z topologického schématu obvodu (**Obr. 35b**) lze vytvořit řadu úplných stromů (**Obr. 37**). Jsou-li tvořeny plynulou posloupností, jde o tzv. *lineární stromy* (**Obr. 37a,b**). Typické jsou též tzv. *hvězdicovité* (vějířovité) stromy (**Obr. 37c, d**). Soustava obsahující několik separátních částí má úplný strom u každé separátní části, a jejich souhrn tvoří *les* stromů.



Obr. 37: Úplné stromy topologického grafu.

Pro aplikaci základních zákonů elektrických obvodů je nutné určit počet **nezávislých uzlů**, resp. uzlových párů (p) , který určuje počet nezávislých rovnic podle 1. KZ a počet **nezávislých smyček** (s) , který určuje počet těchto rovnic podle 2. KZ. U soustav obsahujících *regulární* dvojpóly, se dá snadno zjistit, že tyto veličiny jsou dány jednoduchými vztahy

$$p = n - d, \quad (5.1a)$$

$$s = v - p = v - n + d, \quad (5.1b) \quad (5.1)$$

kde n je počet uzlů dané soustavy, d je počet jejích separátních částí a v je celkový počet větví. Pro obvody s regulárními mnohopóly či mnohobranami budou tyto vztahy zobecněny v kap 7.

5.2 Popis incidenčními maticemi

Příklad 5.4 Popis incidenčními maticemi.

Uvažujte obvod a topologický graf (**Obr. 35b**) z **Příklad 5.1**. Pro nezávislé uzly napište 1. KZ. Pozn.: Proudý vstupující do uzlu se znaménkem (+) vystupující (-).

Řešení:

Pro jednotlivé uzly (1 až 3) napíšeme rovnice 1. KZ.

$$\begin{aligned} (1): & -i_1 + i_4 + i_6 = 0, \\ (2): & -i_2 - i_4 + i_5 = 0, \\ (3): & -i_3 + i_5 + i_6 = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Rovnice (5.2) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (5.3)$$

kde $\mathbf{M}$ je (zkrácená) **incidenční matice uzlů a větví**. Doplněním pro vztažný uzel (0) získáme úplnou incidenční matici $\mathbf{M}^*$

$$\mathbf{M}^* = \begin{array}{c|cccccc} & \text{uzly:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline (1) & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ (2) & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ (0) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (5.4)$$

Matice $\mathbf{M}$ má n řádků a v sloupců. Hodnota $\mathbf{M}$ je $(n-1)$. Zkrácená matice je regulární. Naopak úplná je singulární, $\det \mathbf{M}^* = 0$, součet prvků v řádku nebo ve sloupci je nula. Prvek matice $m_{ik} = 1$, jestliže z i -tého uzlu k -tá větev vystupuje, $m_{ik} = -1$, jestliže do i -tého uzlu k -tá větev vstupuje a $m_{ik} = 0$, když větev z uzlem nesouvisí.

Veškerá větвовá napětí (**Obr. 35 červeně**) jsou určeny napětími uzlovými (**Obr. 35 modře**). Například větвовé napětí

$$U_{v4} = U_1 - U_2. \quad (5.5)$$

V souvislosti se všemi uzly pak vektorově

$$U_{v4} = [1, -1, 0] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Podobně

$$U_{v5} = [0, 1, -1] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

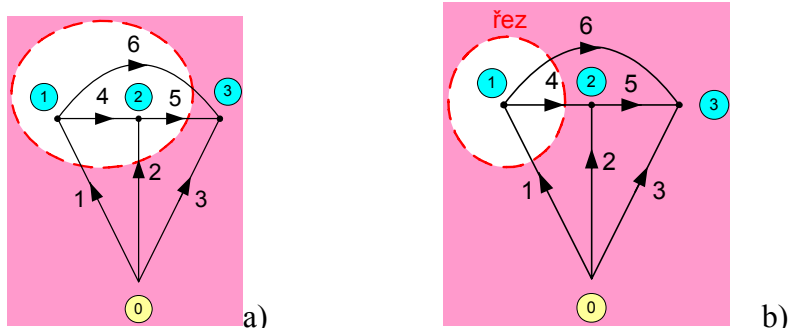
což se dá zobecnit pro všechna větвовá napětí do sumárního maticového tvaru

$$\mathbf{U}_v = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}. \quad (5.8)$$

Rovnice (5.3) reprezentuje 1. KZ a rovnice (5.8) reprezentuje 2. KZ.

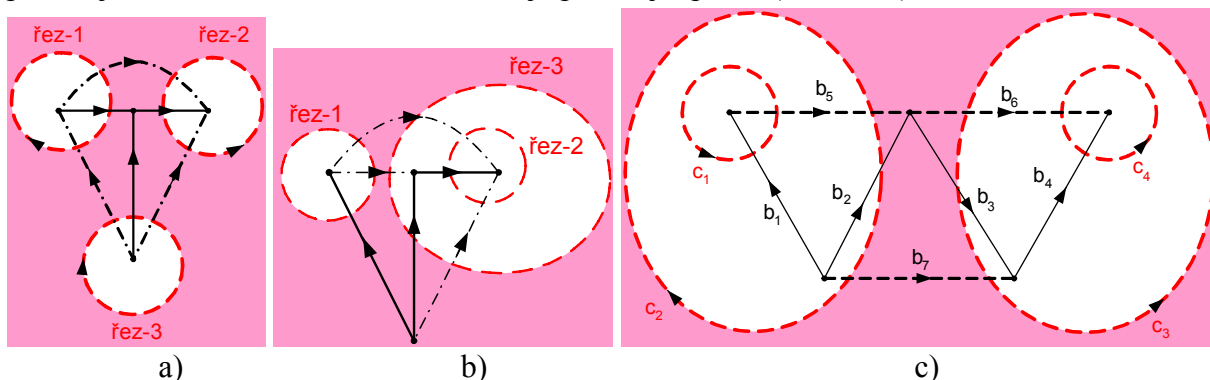
5.3 Soubor řezů grafu.

Řez je soubor větví, které jsme odstranili, aby se graf rozpadl na dvě nesouvisějící části (ne však více). V grafu zakreslujeme řez čárkovanou čarou, která protíná odstraněné větve (**Obr. 38a**). Za jednu část rozříznutého grafu považujeme i samotný uzel (**Obr. 38b**).



Obr. 38: K pojmu řez topologického grafu.

Ze všech možných řezů vybíráme soubor základních **fundamentálních řezů**, kdy každý z nich protíná jen jednu haluzi. Dva fundamentální soubory řezů, související s **Příklad 5.1** jsou na **Obr. 39a,b**. Fundamentálních řezů je tolik, kolik je větví stromu (haluzí). Řezům přisuzujeme orientaci a to tak, že haluze je protínají zprava (**Obr. 39a**).



Obr. 39: Fundamentální soubory řezů.

Řezy označíme c_i a větve b_k (**Obr. 39c**). Pak soubor řezů můžeme zachytit **incidenční maticí řezů a větví Q**. Prvek této matice $q_{ik} = 1$, protíná-li k -tá větev i -tý řez zprava, $q_{ik} = -1$, protíná-li k -tá větev i -tý řez zleva a $q_{ik} = 0$, když k -tá větev i -tý řez neprotíná.

Příklad 5.5 Graf s fundamentálním souborem řezů.

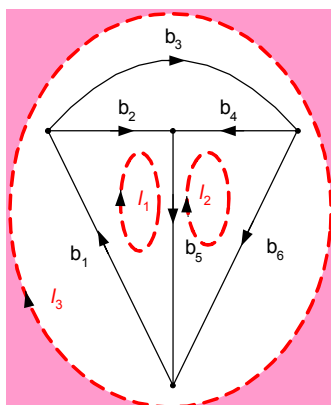
Na **Obr. 39c** je příklad takto popsaného grafu s fundamentálním souborem řezů. Haluze b_1 až b_4 jsou zde vyznačeny plně černě, tětivy b_5 až b_7 čárkovaně černě a fundamentální řezy c_1 až c_4 čárkovaně červeně. Napište incidenční matici řezů a větví **Q**.

Řešení:

Incidenční matice řezů a větví odpovídající grafu na **Obr. 39c** je

$$Q = \begin{array}{c} \text{řezy:} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \begin{array}{c} \text{haluze:} \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \end{array} \begin{array}{c} \text{tětivy:} \\ b_5 \quad b_6 \quad b_7 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (5.9)$$

5.4 Incidenční matice smyček a větví



Každá orientovaná smyčka l_i je tvořena posloupností několika větví (b_k). Všechny nezávislé smyčky sestavíme do vektoru $\mathbf{L}$ a všechny větve do vektoru $\mathbf{B}$, pak můžeme jejich souvislost vyjádřit maticovou rovnicí

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \quad (5.10)$$

kde $\mathbf{D}$ je (zkrácená) **incidenční matice smyček a větví**. Prvek této matice $d_{ik} = 1$, jestliže se orientace i -té smyčky shoduje s orientací k -té větve, $d_{ik} = -1$, když je orientace i -té smyčky opačná k orientaci k -té větve, $d_{ik} = 0$, když k -tá větev není součástí i -té smyčky.

Obr. 40: Graf se souborem nezávislých smyček.

Příklad 5.6 Graf se souborem smyček.

Na **Obr. 40** je topologický graf s vyznačeným souborem tří nezávislých smyček l_1 , l_2 a l_3 . Napište incidenční matici smyček a větví $\mathbf{D}$.

Řešení:

Incidenční matice smyček a větví odpovídající grafu na **Obr. 40** je

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \text{smyčky:} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{větvě:} \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (5.11)$$

Jsou-li větve v incidenčních maticích $\mathbf{M}$ a $\mathbf{D}$ stejně uspořádány, pak mezi nimi platí ortogonální vztahy

$$\mathbf{M}^T \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Incidenční matice zavedl Poincaré. Obrazně řečeno dovolují převést topologické grafy do řeči počítačů. Ukázali jsme si, že pomocí nich můžeme vyjádřit základní zákony (KZ) elektrických obvodů. Použijeme je při obecném a pro počítače lehce algoritmizovatelném sestavování maticového popisu obvodů.

5.5 Kontrolní otázky z kapitoly 5

1. K čemu slouží topologie obvodů? Na zvoleném příkladu ukažte sestavení topologického grafu.
2. Vysvětlete pojmy haluze, tětivy a úplný strom topologického grafu.
3. Vysvětlete pojmy smyčka, řez a fundamentální soubor řezů topologického grafu.
4. Jak jsou definovány a k čemu slouží incidenční matice řezů a větví.
5. Jak jsou definovány a k čemu slouží incidenční matice smyček a větví.

6 Základní maticové metody analýzy obvodů

Cíle kapitoly: Prohloubit znalosti studentů v řešení linearizovaných obvodů metodou smyčkových proudů a uzlových napětí. Naučit je určovat obvodové funkce pomocí algebraických doplňků imitačních matic. Seznámit je s využitím incidenčních matic (kap. 5) pro algoritmizaci řešení obvodů na počítači.

6.1 Analýza linearizovaných obvodů

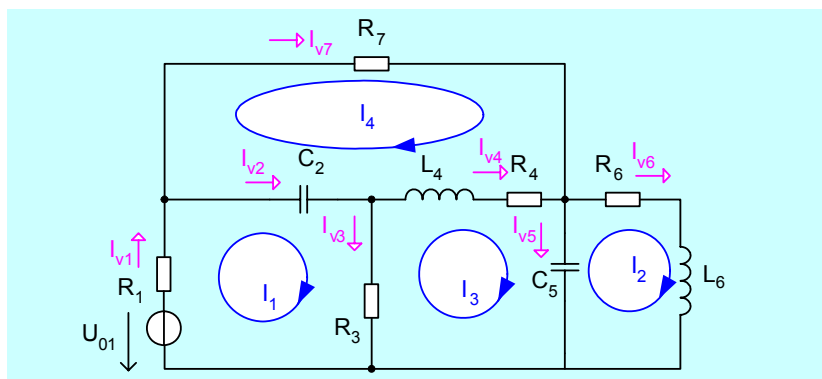
Analýzou se zjišťují vlastnosti elektrických obvodů, jejíž struktura, tj. propojení prvků i jejich parametry jsou dány. Při malé amplitudě zpracovávaných signálů, lze jednotlivé nelineární prvky či bloky nahradit jejich **linearizovanými modely**, popsány diferenciálními parametry závislými na klidových pracovních bodech, jejichž polohu je při **numerické analýze** nutné znát. K tomu slouží **stejnoseměrná analýza** obvodu, což je relativně komplikovaná úloha **nelineární analýzy** řešená zpravidla numericky na počítači. Při **symbolické analýze** používáme obecných symbolů i pro jednotlivé diferenciální parametry a znalost konkrétních pracovních bodů v tomto případě není nezbytná.

Při analýze se vychází ze základních zákonů elektrických obvodů. Výsledkem je popis modelu pomocí soustavy algebraických rovnic o n neznámých obvodových veličin nebo určíme požadované obvodové funkce, např. přenos napětí, vstupní impedanci apod. Při **harmonickém buzení** a analýze **ustáleného stavu** se užívá zápis v **komplexním** nebo **operátorovém** tvaru v kmitočtové oblasti (p nebo ω). Zajímají-li nás **přechodné děje** v časové oblasti následuje navíc ještě zpětná Laplaceova transformace. Počty a tvar nezávislých rovnic vyplynou z **topologického rozboru** daného zapojení obvodu a provedeného podle kap. 5.1.

6.2 Metoda smyčkových proudů

6.2.1 Princip MSP

Princip této metody byl uveden v [7], [8]. Tam jste se také seznámili s postupem sestavování impedanční matice $\mathbf{Z}$ u jednoduchých regulárních obvodů. Poznamenejme, že tento postup je vhodný jen pro ruční výpočty a soustavy obsahující pouze dvoj póly. Zopakujte si jej na sestavení matice $\mathbf{Z}$ v následujícím příkladu.



Obr. 41: Řešení obvodu RLC metodou smyčkových proudů.

Příklad 6.1 *Řešení obvodu RLC metodou smyčkových proudů.*

Uvažujme obvod RLC na **Obr. 41**, který má 4 uzly 7 větví a 4 souhlasně orientované smyčky. (označeny modře). Postupem vám známým z [8] sestavte impedanční matici **Z**.

Základem metody smyčkových proudů (MSP) je zavedení menšího počtu fiktivních proudů tekoucích kolem dokola jednotlivých nezávislých smyček (na **Obr. 41** vyznačeny modře). Vztah mezi skutečnými proudy jednotlivých větví **I_v** (na **Obr. 41** vyznačeny růžově) a nově zavedenými proudy nezávislých smyček **I** lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{I}_v = {}^T \mathbf{D} \mathbf{I} , \quad (6.1)$$

kde **I** je sloupcový vektor smyčkových proudů, **I_v** je vektor proudů jednotlivých větví, **D** je obdélníková transformační matice mezi původními a nově zavedenými souřadnicemi, která je totožná se zkrácenou incidenční maticí smyček a větví, zavedenou v kap. 5.4 , matice **^TD** je k ní transponovaná.

Při volbě nezávislých smyček je výhodný vějířovitý tvar úplného stromu soustavy, neboť pak jsou jednotlivé smyčky přehledně rozprostřeny a navzájem se stýkají minimálním počtem větví. Každé nezávislé smyčce se přisoudí jeden smyčkový proud a sestaví se *s* nezávislých rovnic podle 2 KZ. Před tím všechny zdroje proudu musí být přepočítány na ekvivalentní zdroje napětí. Standardní maticový tvar těchto rovnic je

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I} , \quad (6.2)$$

kde **U** je vektor známých budících smyčkových napětí, tj. součtů napětí všech zdrojů zapojených v každé nezávislé smyčce (kladný směr se přitom bere proti směru jednotlivých smyčkových proudů), **I** je vektor neznámých smyčkových proudů a **Z** je čtvercová impedanční matice. Aby soustava rovnic (2) měla řešení, musí být samozřejmě matice **Z** regulární. Pak existuje i její inverzní matice **Z⁻¹** a řešení lze zapsat v obecném tvaru

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{U} , \quad (6.3)$$

jehož každý řádek vyjadřuje proud v příslušné nezávislé smyčce, tj.

$$I_k = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{1;k} U_{01} + \Delta_{2;k} U_{02} + \dots + \Delta_{s;k} U_{0s}) , \quad k = 1, 2, \dots, s . \quad (6.4)$$

Symbol **Δ** zde označuje determinant impedanční matice **Z**, **Δ_{i;k}** je její algebraický doplněk, tj. **(-1)^α** - krát determinant zkrácené matice, která vznikne z matice **Z** vynecháním *i*-tého řádku a *k*-tého sloupce, kde **α** značí počet lichých čísel mezi indexy *i* a *k* . Rovnice (6.4) je jistým způsobem vyjádření principu superpozice (kap. 2.2.2). Skutečné proudy v jednotlivých větvích se nakonec vypočítají z transformačních rovnic (6.1).

6.2.2 Algoritmus sestavování impedanční matice vhodný pro počítač

Nyní si ukážeme jiný způsob sestavování impedanční matice, vhodný i pro počítače. Založen je na použití incidenční matice větví a smyček **D** (kap. 5.4) a tzv. **impedanční matice větví Z_v**, což je čtvercová diagonální matice, v jejíž hlavní diagonále jsou impedance jednotlivých větví a prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové. Tato matice je součástí impedančního popisu jednotlivých větví v globálním maticovém tvaru **U_v = Z_v I_v**, kde **U_v** a **I_v** jsou vektory napětí a proudů všech větví. Výslednou impedanční matici obvodu (soustavy) **Z** je možné vyjádřit jako součin tří matic

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D} \mathbf{Z}_v {}^T \mathbf{D} = \sum_{i=1}^v \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_i {}^T \mathbf{D}_i . \quad (6.5)$$

Tato lineární transformace představuje obecnější metodický přístup k řešení daného problému, neboť je v ní již vyjádřena souvislost mezi původním (větвовým) popisem jednotlivých prvků soustavy jako dílčích podsoustav a výsledným popisem celé soustavy. Způsob zapojení jednotlivých prvků do této soustavy je zakódován v obou navzájem transponovaných transformačních maticích $\mathbf{D}$ a ${}^T\mathbf{D}$. Zatímco u obvodů obsahujících pouze dvojpóly není tento obecný postup ještě nutný, u soustav s regulárními dvojbrany a mnohobrany je již nezbytný.

Příklad 6.2 Řešení obvodu RLC s využitím incidenčních matic

Právě uvedeným postupem, s využitím incidenčních matic, sestavte impedanční matici $\mathbf{Z}$ obvodu RLC na Obr. 41, který jste řešili jiným způsobem v Příklad 6.1.

Řešení: V prvním kroku sestrojíme dle kap. 5.4 zkrácenou incidenční matici smyček a větví

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.6)$$

Transponovanou incidenční matici ${}^T\mathbf{D}$ získáme záměnou řádků a sloupců.

Zvolená množina čtyř souhlasně orientovaných neznámých smyčkových proudů (I_1 až I_4) je na Obr. 41 vyznačena modře. Množina sedmi větвовých proudů (I_{v1} až I_{v7}) je na Obr. 41 vyznačena červeně.. Jejich vzájemný vztah je dán transformační maticovou rovnicí (6.1) v tomto konkrétním tvaru

$$\begin{bmatrix} I_{v1} \\ I_{v2} \\ I_{v3} \\ I_{v4} \\ I_{v5} \\ I_{v6} \\ I_{v7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Impedanční matice větví bude mít pro volně ložené prvky obvodu na Obr. 41 následující diagonální tvar

$$\mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & & \\ & 1/pC_2 & & & & & \\ & & R_3 & & & & \\ & & & R_4+pL_4 & & & \\ & & & & 1/pC_5 & & \\ & & & & & R_6+pL_6 & \\ & & & & & & R_7 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Výslednou impedanční matici obvodu $\mathbf{Z}$ získáme dle vztahu (6.5) jako součin těchto tří matic $\mathbf{Z} = \mathbf{D}\mathbf{Z}_v\mathbf{D}^T$ (postupným řádko sloupcovým násobením)

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1+R_3+1/pC_2 & & -R_3 & \\ & R_6+pL_6+1/pC_5 & -1/pC_5 & \\ -R_3 & -1/pC_5 & R_3+R_4+pL_4+1/pC_5 & \\ & & & R_7+R_4+pL_4+1/pC_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

6.2.3 Určování obvodových funkcí pomocí algebraických doplňků

Pro jednoduchost při výpočtu obvodových funkcí uvažujeme první nezávislou smyčku jako **vstupní**, buzenou ze zdroje napětí U_{01} a druhou smyčku jako **výstupní**. Existují-li další budící zdroje napětí, tak je zkratujeme a ve vztahu (4) uvažujeme $U_{02} = U_{03} = \dots = U_{0s} = 0$. Pak oba sledované smyčkové proudy (vstupní a výstupní) jsou dány zjednodušenými výrazy

$$I_1 = \frac{\Delta_{1;1}}{\Delta} U_{01} \quad , \quad (6.10a) \qquad I_2 = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta} U_{01} \quad . \quad (6.10b) \quad (6.10)$$

Z těchto rovnic (6.10) lze snadno vyjádřit následující obvodové funkce.

Vstupní admitance (nakrátko) jako poměr vstupního proudu a vstupního (budícího) napětí

$$Y_{inp} = \frac{1}{Z_{inp}} = \frac{I_1}{U_{01}} \bigg|_{U_2=0} = \frac{\Delta_{1;1}}{\Delta} \quad . \quad (6.11)$$

Přenosová admitance (nakrátko) je poměr výstupního proudu a vstupního napětí

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = \frac{I_2}{U_{01}} \bigg|_{U_2=0} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta} \quad . \quad (6.12)$$

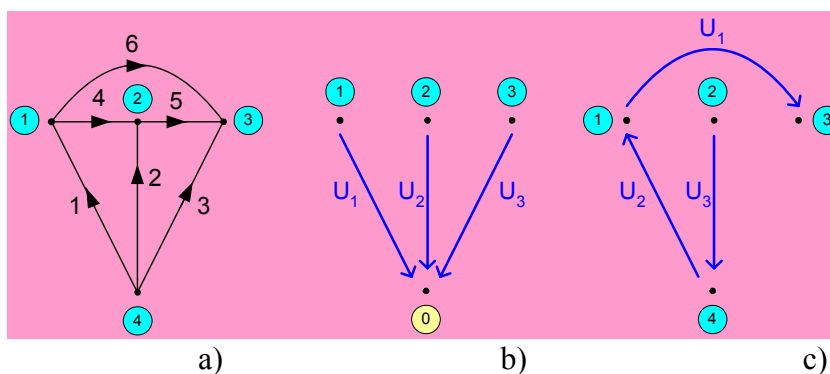
Přenos proudu (nakrátko) je dán poměrem výstupního a vstupního proudu

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} \bigg|_{U_2=0} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta_{1;1}} \quad . \quad (6.13)$$

6.3 Metoda uzlových napětí

6.3.1 Princip MUN

Metoda uzlových napětí (MUN) je **duální** k MSP, takže i postup výkladu bude zcela analogický. Podle toho, jakým způsobem se zvolí **nezávislá napětí** (tj. nezávislé uzlové páry), rozdělují se soustavy souřadnic napětí na souhlasně a nesouhlasně orientované. Ukážeme si to na **Obr. 42**, v obvodu se čtyřmi uzly a šesti větvemi, jehož topologické schéma je na **Obr. 42a**. **Souhlasně orientovaná soustava** uzlových napětí (**Obr. 42b**) má všechna nezávislá napětí vztažena k jednomu společnému **vztažnému uzlu** (tzv. referenční uzlu). Všechny ostatní kombinace tvoří vždy **nesouhlasně orientovanou soustavu** napětí uzlových párů (**Obr. 42c**). Pokud je to možné, snažíme se volit souhlasně orientovanou soustavu, neboť její popis je nejjednodušší.



Obr. 42: Volba soustavy hledaných napětí.

Základem MUN je opět zavedení menšího počtu (p) zvolených napětí uzlových párů. Vztah mezi skutečnými napětími ve větvích $\mathbf{U}_v$ a nově zavedenými napětími nezávislých uzlových párů $\mathbf{U}$ lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{U}_v = {}^t\mathbf{M} \mathbf{U} , \quad (6.14)$$

kde $\mathbf{M}$ je **incidenční matice uzlových napětí** (nezávislých uzlových párů) a **větví** (kap. 5.2) a matice ${}^t\mathbf{M}$ je k ní transponovaná.

Každému nezávislému uzlu (uzlovému páru) se přisoudí hledané napětí a sestaví se p nezávislých rovnic podle 1. KZ. Před tím musí být všechny zdroje napětí přepočítány na ekvivalentní zdroje proudu. Standardní maticový tvar těchto rovnic je

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{U} , \quad (6.15)$$

kde $\mathbf{I}$ je vektor známých **uzlových proudů** (budící veličiny), $\mathbf{U}$ je vektor neznámých *napětí nezávislých uzlových párů* a $\mathbf{Y}$ je čtvercová **admitanční matice**. Aby soustava rovnic (6.15) měla řešení, musí být samozřejmě matice $\mathbf{Y}$ regulární. Pak existuje i její inverzní matice $\mathbf{Y}^{-1}$ a řešení lze zapsat v obecném tvaru

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I} , \quad (6.16)$$

jehož každý řádek vyjadřuje napětí příslušného nezávislého uzlového páru, tj.

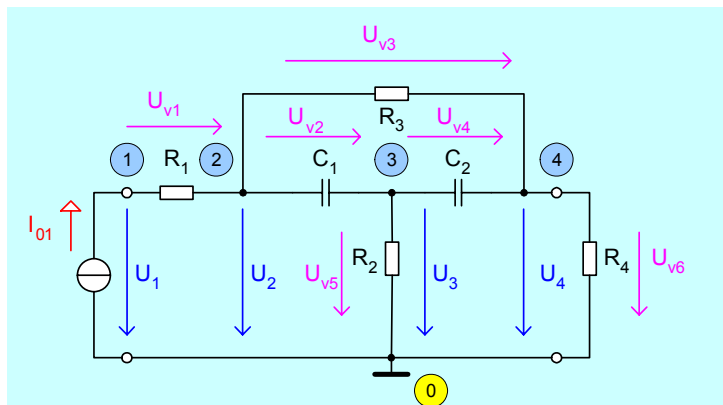
$$U_k = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{1;k} I_{01} + \Delta_{2;k} I_{02} + \dots + \Delta_{p;k} I_{0p}) , \quad k = 1, 2, \dots, p . \quad (6.17)$$

Symbol Δ zde označuje determinant admitanční matice $\mathbf{Y}$, $\Delta_{i;k}$ je opět její **algebraický doplněk**, tj. $(-1)^\alpha$ krát determinant zkrácené matice, která vznikne z matice $\mathbf{Y}$ vynecháním i -tého řádku a k -tého sloupce, kde α značí počet lichých čísel mezi indexy i a k . Rovnice (6.17) je dalším ze způsobů matematického vyjádření **principu superpozice** (kap. 2.2.2). Skutečná větvová napětí se nakonec vypočítají z transformačních rovnic (6.14).

Také u této metody je možné maticovou rovnici (6.16) sestavit přímo podle zapojení obvodu, a to včetně matice $\mathbf{Y}$, jejíž tvar je i zde rozhodující pro výpočet obvodových funkcí. Algoritmus přímého sestavení $\mathbf{Y}$ je opět velmi jednoduchý, zejména u obvodů obsahujících pouze dvojpóly. Seznámili jste se s ním v [7], [8]. V tomto případě je matice $\mathbf{Y}$ stejně jako $\mathbf{Z}$, souměrná okolo hlavní diagonály ($y_{ij} = y_{ji}$) a to v důsledku reciprocity celé soustavy. Postup si zopakujte na sestavení matice $\mathbf{Y}$ v následujícím příkladu.

Příklad 6.3 Řešení obvodu RC metodou uzlových napětí.

Postupem známým z [8]. sestavte admitanční matici obvodu RC na **Obr. 43**.



Obr. 43: Řešení obvodu RC metodou uzlových napětí.

6.3.2 Algoritmus sestavování admitanční matice vhodný pro počítač

Nyní si ukážeme obecnější způsob sestavování výsledné admitanční matice obvodu (soustavy) $\mathbf{Y}$, který je vhodný i pro aplikace na počítači. Založen je na použití **incidenční matice větví a uzlových párů** $\mathbf{M}$ (kap. 5.2) a matice k ní transponované $\mathbf{M}^T$ v následujícím vztahu součinu tří matic

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M} \mathbf{Y}_v \mathbf{M}^T = \sum_{i=1}^v \mathbf{M}_i \mathbf{Y}_i \mathbf{M}_i^T \quad (6.18)$$

Ten je duální ku vztahu (6.5) u MSP. Matice $\mathbf{Y}_v$ je tzv. **admitanční matice větví**. Je to čtvercová diagonální matice, v jejíž hlavní diagonále jsou admitance jednotlivých větví a prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové. Tato matice je součástí admitančního popisu jednotlivých větví v globálním maticovém tvaru

$$\mathbf{I}_v = \mathbf{Y}_v \mathbf{U}_v, \quad (6.19)$$

kde $\mathbf{U}_v$ a $\mathbf{I}_v$ jsou vektory napětí a proudů všech větví.

Transformace opět představuje obecnější metodický přístup. I zde je vyjádřena souvislost mezi původním větvovým popisem a výsledným popisem celé soustavy. Způsob zapojení jednotlivých prvků do této soustavy je zakódován v matici $\mathbf{M}$ resp. $\mathbf{M}^T$. Zatímco u obvodů obsahujících pouze dvojpolý není tento obecný postup nutný, u soustav s regulárními vícebrany je nezbytný.

Příklad 6.4 Řešení obvodu RC s využitím incidenčních matic.

Postupem založeným na vztahu (6.18) sestavte admitanční matici obvodu RC na **Obr. 43**, který jste řešili jiným způsobem v **Příklad 6.3**.

Řešení:

Zvolená množina čtyř souhlasně orientovaných neznámých uzlových napětí (U_1 až U_4) je na **Obr. 43** vyznačena modře. Množina šesti větvových napětí (U_{v1} až U_{v6}) růžově. Jejich vztah je dán transformační maticovou rovnicí (6.14) v tomto konkrétním tvaru

$$\begin{bmatrix} U_{v1} \\ U_{v2} \\ U_{v3} \\ U_{v4} \\ U_{v5} \\ U_{v6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Ten napíšeme přímo na základě inspekce obvodu na **Obr. 43**. Nejprve jako soustavu šesti rovnic, vyjadřující vztah mezi původními napětími ve větvích U_v a nově zavedenými uzlovými napětími U , např.: $U_{v1} = U_1 - U_2$. Soustavu rovnic pak přepíšeme do maticového tvaru (6.20), kde obdélníková matice je hledaná $\mathbf{M}^T$.

Admitanční matice větví $\mathbf{Y}_v$ bude mít pro volně ložené prvky obvodu na **Obr. 43** následující diagonální tvar

$$\mathbf{Y}_v = \begin{bmatrix} G_1 & & & & & \\ & pC_1 & & & & \\ & & G_3 & & & \\ & & & pC_2 & & \\ & & & & G_2 & \\ & & & & & G_4 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Výslednou admitanční matici obvodu **Y** získáme dle vztahu (6.18), jako součin tří odvozených matic (postupným řádko sloupcovým násobením). Výsledkem je

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & & \\ -G_1 & G_1 + G_3 + pC_1 & -pC_1 & -G_3 \\ & -pC_1 & pC_1 + pC_2 & -pC_2 \\ & -G_3 & -pC_2 & G_3 + G_4 + pC_2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.3.3 Určování obvodových funkcí pomocí algebraických doplňků

Uvažujme opět základní aplikaci obvodů pro zpracování signálů, kdy lineární soustavu lze považovat za **dvojbran**, který je buzen pouze jedním zdrojem signálu na **vstupní bráně** a zatížen na **výstupní bráně** určitou impedancí. Tehdy je vhodné (ne však nutné) volit první nezávislý uzlový pár soustavy jako **vstupní**, tj. buzený ze zdroje proudu **I_{01}** , a druhý uzlový pár jako **výstupní**. Existují-li v obvodě další budící zdroje tak je deaktivujeme (kap. 2.2.3).

Pro výpočet hledaných obvodových veličin dosadíme do vztahu (6.17) za $I_{02} = I_{03} = \dots = I_{0p} = 0$. Pak obě sledovaná **uzlová napětí** (vstupní a výstupní) jsou dány zjednodušenými výrazy

$$U_1 = \frac{\Delta_{1;1}}{\Delta} I_{01}, \quad (6.23a) \quad U_2 = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta} I_{01}. \quad (6.23b) \quad (6.23)$$

Z těchto rovnic (6.23) lze snadno vyjádřit **základní obvodové funkce** a to v tomto případě **při výstupu naprázdno**.

Vstupní impedance (naprázdno) je poměr vstupního napětí a vstupního (budícího) proudu

$$Z_{inp} = \frac{1}{Y_{inp}} = \frac{U_1}{I_{01}} \bigg|_{I_2=0} = \frac{\Delta_{1;1}}{\Delta}. \quad (6.24)$$

Přenosová impedance (naprázdno) je definována jako poměr výstupního napětí a vstupního proudu

$$Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{U_2}{I_{01}} \bigg|_{I_2=0} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta}. \quad (6.25)$$

Přenos napětí (naprázdno) je dán poměrem výstupního a vstupního napětí a z podílu vztahů (6.23) pak vychází vzorec

$$K_u = \frac{U_2}{U_1} \bigg|_{I_2=0} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta_{1;1}}. \quad (6.26)$$

Uvedené obvodové funkce lze místo naprázdno také definovat s určitou hodnotou zátěže **Z_L** , ne však při výstupu nakrátko, jako u MSP.

6.3.4 Úplný admitanční popis soustavy

Souhlasně orientovanou soustavu uzlových napětí lze rozšířit o jedno napětí tak, že vztahný uzel položíme mimo uvažovanou soustavu, takže počet uzlových napětí bude roven počtu uzlů soustavy **n** (jedno napětí bude samozřejmě závislé – viz **Obr. 44**). Vlastnosti soustavy obvodů je možné opět popsat základní maticovou rovnicí (6.15), která však má v tomto případě tvar

$$\mathbf{I}^* = \mathbf{Y}^* \mathbf{U}^*, \quad (6.27)$$

kde $\mathbf{I}^*$ je úplný vektor uzlových (budicích) proudů, $\mathbf{U}^*$ je úplný vektor uzlových napětí a $\mathbf{Y}^*$ je tzv. **úplná admitanční matice**.

Popis soustavy podle (6.27) je zřejmě nadbytečný, neboť jedna z n rovnic je dána jednoduchou lineární kombinací zbývajících. Úplná admitanční matice $\mathbf{Y}^*$, popisující soustavu jako n -pól, má na rozdíl od matice $\mathbf{Y}$, popisující tutéž soustavu jako $(n-1)$ -bran, tyto *odlišné vlastnosti* [5]:

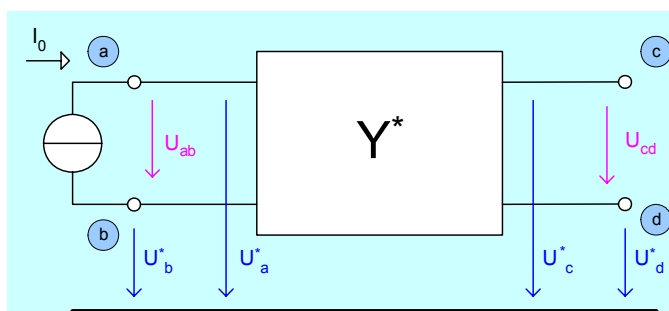
a) Obsahuje n řádků a sloupců, tj. právě tolik, kolik má soustava uzlů.

b) Je singulární, neboť $\Delta^* = 0$,
což je dáno lineární závislostí nadbytečného řádku a sloupce.

c) Součet prvků v každém řádku a sloupci je roven nule,

$$\text{tj. } \sum_{s=1}^n y_{rs}^* = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{r=1}^n y_{rs}^* = 0.$$

d) Libovolný jednoduchý algebraický doplněk má stejnou hodnotu
a je to tzv. **invariant** soustavy $\Delta_{i,j}^* = C^*$.



Obr. 44: Model obvodu při úplném admitančním popisu soustavy.

Vzhledem k singularitě úplné admitanční matice $\mathbf{Y}^*$, nelze vyjádřit řešení základní maticové rovnice (6.27) pomocí inverzní matice. Všechny potřebné obvodové funkce lze však vyjádřit pomocí tzv. dvojnásobných algebraických doplňků matice $\mathbf{Y}^*$ [5].

Uvažujme opět základní uspořádání pro přenos signálu mezi dvěma branami, s modelem na **Obr. 44**. Zde vstupní bránu (uzlový pár) tvoří uzly a a b , výstupní bránu pak uzly c a d . Napětí vstupní a výstupní brány jsou zřejmě vždy dána jako rozdíl příslušných uzlových napětí, tj. $U_{ab} = U_a^* - U_b^*$, $U_{cd} = U_c^* - U_d^*$.

Základní **obvodové funkce naprázdno** lze pak vyjádřit následujícími vztahy [5]:

Vstupní impedance (naprázdno)

$$Z_{inp} = \frac{U_{ab}}{I_0} = \frac{\Delta_{ab,ab}^*}{C^*}, \quad (6.28)$$

přenosová impedance (naprázdno)

$$Z_T = \frac{U_{cd}}{I_0} = \frac{\Delta_{ab;cd}^*}{C^*}, \quad (6.29)$$

přenos napětí (naprázdno)

$$K_u = \frac{U_{cd}}{U_{ab}} = \frac{\Delta_{ab;cd}^*}{\Delta_{ab;ab}^*}. \quad (6.30)$$

Znaménko dvojnásobných algebraických doplňků se stanoví jako $(-1)^{\alpha+\beta}$, kde α je opět počet lichých čísel v obou dvojicích indexů a β je počet vzájemných výměn (permutací) nutných k tomu, aby čísla v obou skupinách indexů měla přirozenou posloupnost.

Vztahy (6.28) až (6.30) jsou obecnější než vztahy (6.24) až (6.26), vycházející ze zkrácené matice $\mathbf{Y}$. Je to dáno tím, že každý řádek či sloupec úplné matice $\mathbf{Y}^*$, odpovídá vždy přímo příslušnému uzlu soustavy. Proto je možné vypočítat podle vzorce (6.30) i přenos napětí soustavy obvodů, kde vstupní a výstupní uzlový pár nemá žádný společný uzel. Přitom dvojnásobné algebraické doplňky jsou v podstatě stejně složité jako jednoduché doplňky u adekvátního zkráceného popisu. Jednotný jednoduchý algoritmus pro sestavování úplné admitanční matice je navíc také výhodný pro aplikaci v programech pro řešení obvodů na počítači.

6.4 Kontrolní otázky z kapitoly 6

1. Vysvětlete princip metody smyčkových proudů. Jak pomocí incidenčních matic sestrojíme výslednou impedanční matici?
2. Vysvětlete princip metody uzlových napětí. Jak pomocí incidenčních matic sestrojíme výslednou admitanční matici?
3. Vysvětlete princip impedančního popisu obvodů. Jak určujeme obvodové funkce u metody smyčkových proudů pomocí algebraických doplňků?
4. Vysvětlete princip admitančního popisu obvodů. Jak určujeme obvodové funkce u metody uzlových napětí pomocí algebraických doplňků?
5. Vysvětlete princip a výhody úplného admitančního popisu soustavy obvodů.

7 Analýza obvodů s regulárními dvojbrany a vícebrany

Cíle kapitoly: Naučit studenty řešit obvody s lineárními dvojbrany (s bipolárními a unipolárními tranzistory, s transformátory s dvěma vinutími) a vícebrany (s vázanými cívkami, s tří a vícebranovými transformátory), a to jak metodou smyčkových proudů, tak i uzlových napětí. Na řadě příkladů procvičit sestavování imitačních matic a určování obvodových funkcí.

7.1 Metoda smyčkových proudů zobecněná pro regulární vícebrany

Z hlediska metody smyčkových proudů se považuje za *regulární* takový prvek, který lze popsat impedančními parametry, tj. má svoji vlastní impedanční matici. Postup analýzy soustav s regulárními mnohopóly, resp. mnohobranami, je v podstatě shodný s postupem naznačeným v kap. 6.2 pro regulární dvojpóly. Jednotlivé kroky je však nutné pro regulární vícebrany zobecnit, resp. modifikovat.

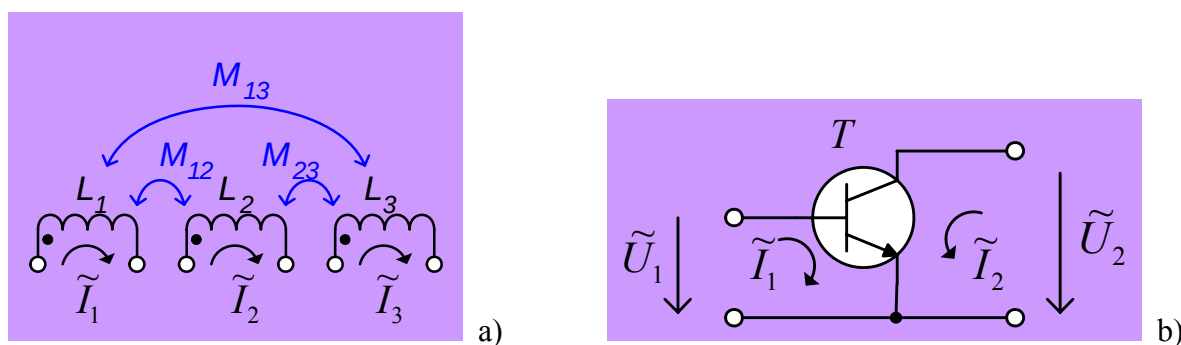
První rozdíl se projeví při stanovení počtu nezávislých smyček, kde již nelze vycházet z počtu větví v , ale je zde nutné stanovit modifikovanou veličinu ekvivalentní počtu větví jako rozdíl $v_{ekv} = q - m$, kde m je počet všech regulárních obvodových prvků (včetně dvojpólů) a q je celkový součet všech jejich pólů (svorek, vývodů). Protože soustava může obsahovat také transformátory a tedy i několik separátních částí d , bude počet nezávislých smyček dán obecně

$$s = q - m - n + d \quad (7.1)$$

Další podstatný rozdíl spočívá v popisu dílčích obvodových prvků, kde již nestačí jediný parametr, jako v případě impedance regulárního dvojpólu, resp. jednoduchá diagonální impedanční matice větví pro výchozí popis celé soustavy, ale je nutné vycházet z dílčího impedančního popisu jednotlivých prvků

$$\tilde{U}_i = \tilde{Z}_i \tilde{I}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.2)$$

kde $\tilde{I}_i$ a $\tilde{U}_i$ jsou vektory původních smyčkových proudů a budících smyčkových napětí samotného i -tého prvku a $\tilde{Z}_i$ je jeho původní impedanční matice.



Obr. 45: Popis samostatných vícebranů.

a) trojbranový transformátor, b) tranzistor jako dvojbran.

Dva často používané regulární vícebrany jsou na **Obr. 45**. **Trojbranový transformátor** na **Obr. 45a** je popsán vztahem (7.2), s dílčí impedanční maticí

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{\text{trafo}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (\tilde{1}) & (\tilde{2}) & (\tilde{3}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (\tilde{1}) \\ (\tilde{2}) \\ (\tilde{3}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} pL_1 & pM_{12} & pM_{13} \\ pM_{12} & pL_2 & pM_{23} \\ pM_{13} & pM_{23} & pL_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.3)$$

kde L_i jsou vlastní a M_{ij} vzájemné indukčnosti vinutí.

Bipolární tranzistor v zapojení se společným emitorem (SE) na Obr. 45b je popsán vztahem (7.2), s dílčí impedanční maticí

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} (\tilde{1}) & (\tilde{2}) \end{matrix} \\ (\tilde{1}) & \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.4)$$

kde z_{ij} jsou impedanční parametry tranzistoru se společným emitorem. V případě možné záměny, přidáme ještě index e (z_{21e}).

K provedení regulární transformace dílčích matic do výsledných souřadnic soustavy musíme znát vztahy mezi původními a novými výslednými smyčkovými proudy $\mathbf{I}$ resp. napětími $\mathbf{U}$, obecně v následujícím maticovém tvaru

$$\tilde{\mathbf{I}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{I} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{U}}_i \quad (7.6)$$

U regulárních obvodových prvků jsou transformační matice navzájem transponované ($\mathbf{D}_i = \mathbf{C}_i^T$) a stačí tedy znát pouze vztah (7.5) mezi proudy.

Dílčí impedanční matice i -tého prvku přetransformovaná do nových společných souřadnic je dána součinem tří matic

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{C}_i^T \tilde{\mathbf{Z}}_i \mathbf{C}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.7)$$

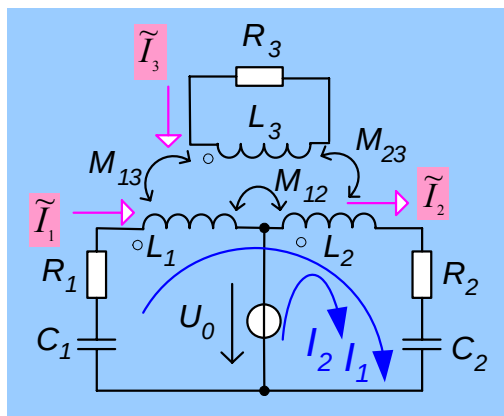
Výslednou impedanční matici soustavy lze pak zapsat jako součet dílčích transformovaných matic

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_i^T \tilde{\mathbf{Z}}_i \mathbf{C}_i \quad , \quad (7.8)$$

Tento vztah (7.8) vyjadřuje zobecněný pohled na strukturu celé soustavy jako sériového spojení dílčích prvků popsaných svými transformovanými impedančními maticemi $\mathbf{Z}_i$.

Výpočet obvodových funkcí se provádí podle stejných vzorců jako v kap.6.2.3.

Protože součin tří matic (7.8) není pro ruční výpočet příliš vhodný, byly hledány způsoby, jak tento krok obejít nebo provést zjednodušeně. U soustav s dvoj póly jste již v kap.6.2 použili jednodušší algoritmus pro přímé sestavení imitančních matic. Pro soustavy s mnohobrany existuje několik možností, které si ukážeme na konkrétních příkladech.



Obr. 46: Obvod obsahující transformátor se třemi vinutími.

Příklad 7.1 Obvod s transformátorem.

Sestavte impedanční matici obvodu na **Obr. 46**, obsahující linearizovaný transformátor se třemi vinutími.

Řešení:

V prvním kroku definiční popis transformátoru dle (**Obr. 45a**) maticí $\tilde{\mathbf{Z}}_{\text{trafo}}$ (7.3), převedeme do zvolených souřadnic řešení celého obvodu (**Obr. 46**). Původní definiční proudy transformátoru (označeny vlnovkou a růžově) vyjádříme pomocí nově zavedených smyčkových proudů (označeny modře). Příslušné transformační vztahy mají tvar

$$\tilde{I}_1 = I_1, \quad (7.9a) \quad \tilde{I}_2 = I_1 + I_2, \quad (7.9b) \quad \tilde{I}_3 = -I_3, \quad (7.9c), \quad (7.9)$$

což je konkrétní tvar obecné maticové transformační rovnice (7.5). Koefficienty v těchto jednoduchých rovnicích představují parametry transformační matice $\mathbf{C}_t$.

Novou dílčí matici transformátoru $\mathbf{Z}_{\text{trafo}}$ lze získat jako součin tří matic (7.8). Tuto operaci lze obejít následujícím postupem přímého zatransformování matice volně loženého transformátoru $\tilde{\mathbf{Z}}_{\text{trafo}}$ (7.3) do soustavy souřadnic, ve které náš obvod řešíme. Podle rovnice (7.9) napíšeme symbol $(\tilde{1})$ k 1. řádce a sloupci výsledné matice transformátoru $\mathbf{Z}_{\text{trafo}}$. Obdobně podle (7.9) pak symbol $(\tilde{2})$ k 1. i 2. řádce a sloupci a podle (7.9) symbol $(\tilde{3})$ se záporným znaménkem k 3. řádce a sloupci. Na základě těchto pomocných značek vepíšeme do matice $\mathbf{Z}_{\text{trafo}}$ odpovídající prvky původní matice $\tilde{\mathbf{Z}}_{\text{trafo}}$ (7.3). Znaménko je vždy dáno jako součin znaménka u značek v řádce a sloupci. Výsledkem je následující impedanční matice transformátoru přetransformovaná do nových souřadnic

$$\mathbf{Z}_{\text{trafo}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1): (\tilde{1}), (\tilde{2}) & (2): (\tilde{2}) & (3): -(\tilde{3}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1): (\tilde{1}), (\tilde{2}) \\ (2): (\tilde{2}) \\ (3): -(\tilde{3}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} p(L_1 + L_2 + 2M_{12}) & p(L_2 + M_{12}) & -p(M_{13} + M_{23}) \\ p(L_2 + M_{12}) & pL_2 & -pM_{23} \\ -p(M_{13} + M_{23}) & -pM_{23} & pL_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.10)$$

Stejného postupu lze formálně použít i při sestavování impedanční matice zbytku obvodu obsahujícího dvojpóly RC . Pro zjednodušení zápisu zavedeme impedance $Z_1(p) = R_1 + (pC_1)^{-1}$ a $Z_2(p) = R_2 + (pC_2)^{-1}$. Pak transformačním rovnicím

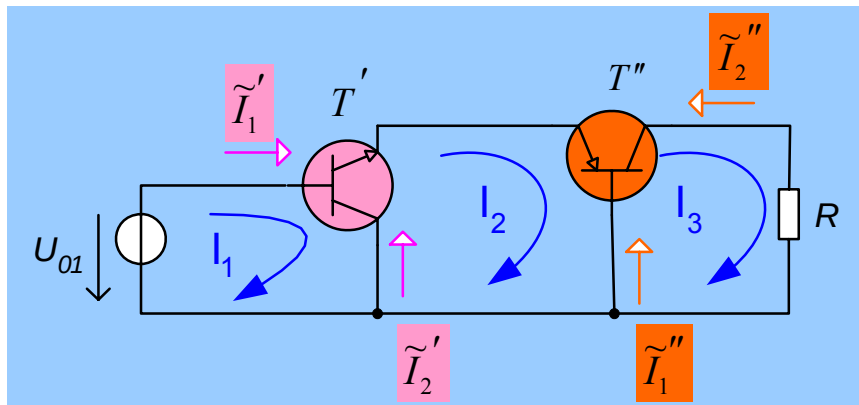
$$\tilde{I}_{(Z_1)} = I_1, \quad (7.11a) \quad \tilde{I}_{(Z_2)} = I_1 + I_2, \quad (7.11b) \quad \tilde{I}_{(R)} = I_3, \quad (7.11c) \quad (7.11)$$

odpovídá přetransformovaná dílčí impedanční matice podobvodu dvojpólů RC ve tvaru

$$\mathbf{Z}_{\text{dvoj}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1): (Z_1), (Z_2) & (2): (Z_2) & (3): (R) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1): (Z_1), (Z_2) \\ (2): (Z_2) \\ (3): (R) \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_1(p) + Z_2(p) & Z_2(p) & \\ \hline Z_2(p) & Z_2(p) & \\ \hline & & R \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad (7.12)$$

Vzhledem k tomu, že dvojpóly jsou popsány jediným parametrem, jsou jako pomocné značky u řádků a sloupců použity jejich impedance, které se pak přímo sepisují do matice $\mathbf{Z}_{\text{dvoj}}$. Výsledná impedanční matice soustavy, z níž se pak již dají přímo vyjádřit základní obvodové funkce je pak zřejmě dána součtem

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{\text{tr}} + \mathbf{Z}_{\text{dvoj}}. \quad (7.13)$$



Obr. 47: Zesilovač se dvěma tranzistory.

Příklad 7.2 Zesilovač se dvěma tranzistory.

U lineárního modelu zesilovače se dvěma bipolárními tranzistory na **Obr. 47** máme vypočítat přenos proudu $K_i = I_3 / I_1$. Oba tranzistory jsou popsány impedančními parametry pro zapojení se společným emitorem, maticí (7.4).

Poznámka:

Obvod na **Obr. 47** představuje maximálně zjednodušený model skutečného zesilovače pro výpočet jeho vlastností v linearizovaném režimu, takže např. místo zdrojů stejnosměrného napájecího napětí jsou uvažovány zkratky, nejsou zakresleny rezistory pomocných obvodů pro stabilizaci stejnosměrných pracovních bodů obou tranzistorů, apod.

Řešení:

Původní definiční proudy jednotlivých tranzistorů jsou ve schématu na obr. 7 jsou opět označeny vlnovkou a podbarveny. Vyjádříme je opět pomocí nově zavedených smyčkových proudů a dostáváme následující transformační rovnice.

Tranzistor $\mathbf{T}'$:

$$\tilde{I}'_1 = I_1, \quad \tilde{I}'_2 = -I_1 + I_2. \quad (7.14)$$

Tranzistor $\mathbf{T}''$:

$$\tilde{I}''_1 = -I_2 + I_3, \quad \tilde{I}''_2 = -I_3. \quad (7.15)$$

Obdobně pro resistor:

$$\tilde{I}_{(R)} = I_3 \quad (7.16)$$

Podle stejného algoritmu zapíšeme pomocné značky k řádkům a sloupcům výsledné impedanční matice $\mathbf{Z}$ a přetransformujeme jednotlivé prvky dílčích impedančních matic, takže pak bude mít výsledná impedanční matice soustavy tvar (7.17)

(7.17)

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{l} \begin{array}{l} (1): \quad (\tilde{I}'), -(\tilde{I}'') \\ (2): \quad (\tilde{I}''), -(\tilde{I}') \\ (3): \quad (\tilde{I}'), -(\tilde{I}'') \\ \quad \quad (R) \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{l} (1): \quad (\tilde{I}'), -(\tilde{I}') \end{array} & \begin{array}{l} (2): \quad (\tilde{I}''), -(\tilde{I}') \end{array} & \begin{array}{l} (3): \quad (\tilde{I}'), -(\tilde{I}''), (R) \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} z'_{11e} + z'_{22e} - (z'_{12e} + z'_{21e}) \end{array} & \begin{array}{l} z'_{12e} - z'_{22e} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{l} z'_{21e} - z'_{22e} \end{array} & \begin{array}{l} z'_{22e} - z''_{11e} \end{array} & \begin{array}{l} z''_{12e} - z''_{11e} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} z''_{21e} - z''_{11e} \end{array} & \begin{array}{l} R + z''_{11e} + z''_{22e} - \\ - (z''_{12e} + z''_{21e}) \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Přenos proudu se vypočítá ze vztahu

$$K_i = \frac{\Delta_{1;3}}{\Delta_{1;1}} = \dots = \frac{(z'_{21} - z'_{22})(z''_{21} - z''_{11})}{z'_{22}(R + z''_{11} + z''_{22} - z''_{12} - z''_{21}) + z''_{11}R + \det z''}, \quad (7.18)$$

kde

$$\det z'' = z''_{11}z''_{22} - z''_{12}z''_{21}. \quad (7.19)$$

7.2 Metoda uzlových napětí zobecněná pro regulární vícebrany

Z hlediska metody MUN se považuje za *regulární* takový prvek, který má svoji vlastní admítanční matici. Analýza soustav obsahujících tyto prvky začíná volbou nezávislých uzlových napětí resp. napětí uzlových párů. Soustava může obsahovat i několik separátních částí $\mathbf{d}$, takže počet nezávislých uzlových párů je dán vztahem

$$p = n - d. \quad (7.20)$$

Postup je zcela duální MSP. Admítanční matice soustavy $\mathbf{Y}$ sestavíme opět jako součet dílčích admítančních matic jednotlivých prvků $\mathbf{Y}_i$, přetransformovaných do zvolené soustavy napětí na matici $\mathbf{Y}_i$. Použitá transformace je opět regulární (nemění se počet proměnných). Přitom je zapotřebí znát vztah

$$\tilde{\mathbf{U}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{U}, \quad (7.21)$$

mezi původními napětími $\tilde{U}_i$ (z definice jednotlivých prvků) a zvolenými uzlovými napětími soustavy U . A také vztah

$$I = D_i \tilde{I}_i, \quad (7.22)$$

mezi původními proudy prvků $\tilde{I}_i$ a novými budícími proudy soustavy I .

Obdobně jako u MSP, u regulárních obvodových prvků jsou transformační matice i zde navzájem transponované ($D_i = {}^T C_i$) a stačí znát pouze vztah (7.21) pro napětí.

Díličí admitanční matice i -tého prvku přetransformovaná do nových (společných) souřadnic je opět dána součinem tří matic

$$Y_i = {}^T C_i \tilde{Y}_i C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.23)$$

Celá soustava je popsána rovnicí $I = YU$. Výslednou matici Y lze získat (analogicky k MSP) jako součet díličích transformovaných matic (7.23), tedy

$$Y = \sum_{i=1}^m Y_i = \sum_{i=1}^m {}^T C_i \tilde{Y}_i C_i. \quad (7.24)$$

Vztah (7.24) vyjadřuje duální zobecněný pohled na strukturu celé soustavy jako obecného paralelního spojení díličích obvodových prvků popsanych svými transformovanými admitančními maticemi Y_i .

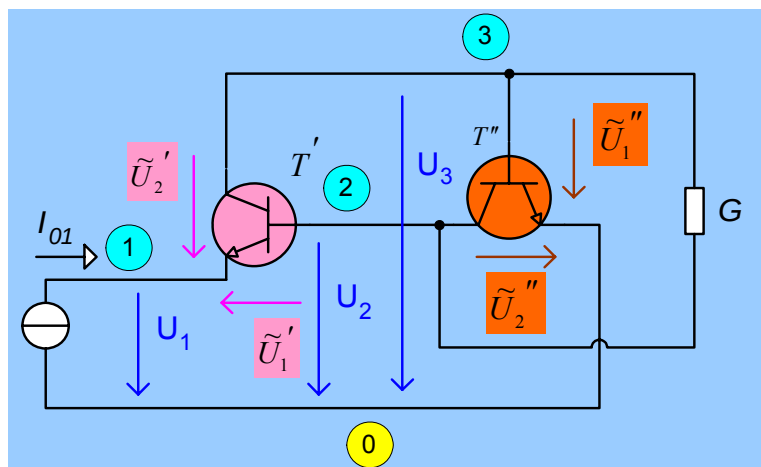
Poznamenejme, že volně ložený bipolární tranzistor v zapojení se společným emitorem (SE) (**Obr. 45b**) lze pro MUN duálně popsat touto díličí admitanční maticí

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.25)$$

kde y_{ij} jsou admitanční parametry tranzistoru se společným emitorem. V případě možné záměny, přidáme ještě index e (y_{21e}).

Příklad 7.3 Obvod se dvěma tranzistory.

Pro obvod se dvěma tranzistory a jedním rezistorem (**Obr. 48**) sestavte admitanční matici a vypočítejte vstupní impedanci. Oba tranzistory jsou popsány y -parametry se společným editorem, tedy maticí (7.25).



Obr. 48: Obvod se dvěma tranzistory.

Původní uzlová napětí dílčích prvků jsou ve schématu na **Obr. 48** zakreslena různou barvou a označena čárkovaně. Tato napětí lze vyjádřit pomocí zavedených, souhlasně orientovaných, uzlových napětí (na **Obr. 48** zakresleny modře). Příslušné transformační rovnice pro jednotlivé dílčí prvky pak mají následující tvar

$$\begin{aligned} \text{Tranzistor } \mathbf{T}' : \quad & \tilde{U}'_1 = -U_1 + U_2, \quad \tilde{U}'_2 = -U_1 + U_3. \\ \text{Tranzistor } \mathbf{T}'' : \quad & \tilde{U}''_1 = U_3, \quad \tilde{U}''_2 = U_2. \\ \text{Rezistor } \mathbf{G} : \quad & \tilde{U}_{(G)} = -U_2 + U_3. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Nyní podle těchto rovnic zapíšeme pomocné značky k řádkům a sloupcům výsledné admitanční matice soustavy **Y** a přetransformujeme do ní jednotlivé prvky dílčích admitančních matic.

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1): & -(\tilde{I}'), -(\tilde{Z}') & (2): & (\tilde{I}'), (\tilde{Z}''), -(G) & (3): & (\tilde{Z}'), (\tilde{I}''), (G) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1): & -(\tilde{I}'), -(\tilde{Z}') \\ (2): & (\tilde{I}'), (\tilde{Z}''), -(G) \\ (3): & (\tilde{Z}'), (\tilde{I}''), (G) \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11e} + y'_{12e} + y'_{21e} + y'_{22e} & -(y'_{11e} + y'_{21e}) & -(y'_{12e} + y'_{22e}) \\ -(y'_{11e} + y'_{12e}) & y'_{11e} + y''_{22e} + G & y'_{12e} + y''_{21e} - G \\ -(y'_{21e} + y'_{22e}) & y'_{21e} + y''_{12e} - G & y'_{22e} + y''_{11e} + G \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.27)$$

Vstupní impedance se vypočítá ze vztahu (6.24). Dalším podrobnějším rozbořem se dá zjistit, že za určitých podmínek může být tento diferenciální parametr i záporný.

7.3 Kontrolní otázky z kapitoly 7

- 1) Vysvětlíte princip metody smyčkových proudů zobecněné pro regulární vícebrany. Které prvky jsou vůči této metodě neregulární a které ano?
- 2) Uveďte impedanční popis trojbranového transformátoru (tří induktivně vázaných cívek).
- 3) Uveďte impedanční popis bipolárního tranzistoru, jako dvojbranu v zapojení se společným emitorem (SE). Nakreslete odpovídající obvodový model.
- 4) Vysvětlíte princip metody uzlových napětí zobecněné pro regulární vícebrany. Které prvky jsou vůči této metodě neregulární a které ano?
- 5) Uveďte admitanční popis bipolárního tranzistoru, jako dvojbranu v zapojení se společným emitorem (SE). Nakreslete odpovídající obvodový model.

8 Analýza obvodů s neregulárními prvky

Cíle kapitoly: Naučit studenty řešit obvody s neregulárními prvky a funkčními bloky (s ideálními transformátory, s imitačními konvertory, s operačními zesilovači, s ideálními zesilovači napětí a proudu). Na řadě příkladů procvičit zvláštní způsob sestavování admitanční matice (operacemi s řádky a sloupci matice regulární části).

Při rozebírání této problematiky se zaměříme pouze na *metodu uzlových napětí*. Všechny výsledky a závěry jsou pro metodu smyčkových proudů duální.

8.1 Neregulární prvky a funkční bloky

Za **neregulární** považujeme všechny prvky, které nelze popsat admitančními parametry, tedy neexistují jejich dílčí admitanční matice. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že jde o neregulární **dvojbrany**. Uváděná metoda se dá zobecnit i na neregulární vícebrany.

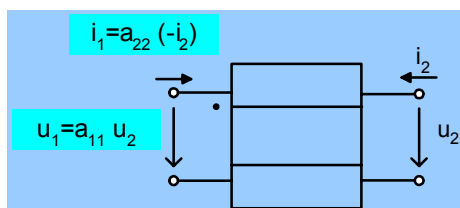
V první řadě to jsou to různé typy **imitančních konvertorů** (IK). **Obecný IK (Obr. 49)** je lineární dvojbran, který nemá matici $\mathbf{Y}$ a lze popsat pouze kaskádní maticí v diagonálním tvaru

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

Zatížíme-li IK na výstupní bráně impedancí Z_z , pak vstupní impedance tohoto obvodu bude přímo úměrná této zatěžovací impedanci

$$Z_{vst} = \frac{a_{11}}{a_{22}} Z_z. \quad (8.2)$$

Podle znaménka poměru a_{11}/a_{22} se IK dělí na **pozitivní** a **negativní**.



Obr. 49: Obecný imitanční dvojbranový konvertor jako neregulární prvek vůči MUN.

Pokud je u pozitivního konvertoru $a_{11}a_{22} = 1$, jde o reciprokový dvojbran typu **ideální transformátor** (Obr. 50a) s parametry

$$a_{11} = n^{-1}, \quad a_{22} = n, \quad (8.3)$$

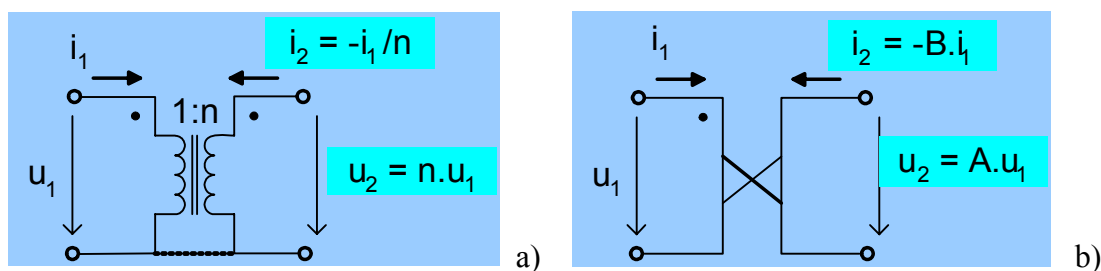
což je zvláštní případ obecného **aktivního transformátoru**, kde je

$$a_{11}a_{22} \neq 1, \quad a_{11} = n_1^{-1}, \quad a_{22} = n_2, \quad n_1 \neq n_2, \quad (8.4)$$

resp. **ideálního měniče výkonu** (Obr. 50b). U tohoto prvku je okamžitý výkon na výstupní bráně dán vztahem

$$p_2 = u_2(-i_2) = ABu_1 i_1 = ABp_1, \quad (8.5)$$

je tedy $AB - \text{kr} \neq 0$ větší než výkon vstupní ($AB > 0$).



Obr. 50: Zvláštní typy imitačních konvertorů.

a) Dvojbranový ideální transformátor, b) ideální měnič výkonu (pozitivní IK).

Negativní IK představuje vždy nerekiproký dvojbran, neboť znaménka parametrů a_{11}, a_{22} jsou různá. Podle toho, který z těchto parametrů je záporný, jde buď o **napěťový typ** ($a_{11} < 0$) nebo o **proudový IK** ($a_{22} < 0$).

Za zvláštní případ IK lze také považovat také **ideální zesilovače**, u nichž je jen jeden z kaskádních parametrů nenulový a takovýto dvojbran již není bilaterální jako obecný IK.

Ideální zesilovač napětí (Obr. 51a) má parametry

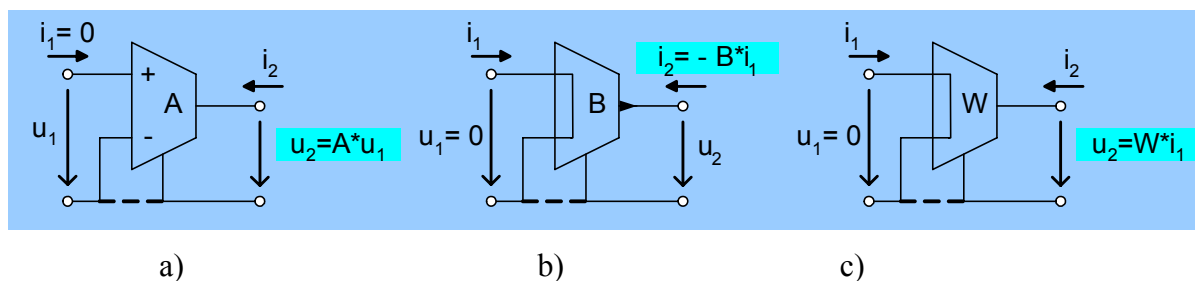
$$a_{11} = A^{-1}, a_{22} = 0, \quad (8.6)$$

jde vlastně o zdroj napětí řízený napětím (VCVS).

Ideální zesilovač proudu (Obr. 51b) má naopak

$$a_{11} = 0, a_{22} = B^{-1}, \quad (8.7)$$

takže jde vlastně o zdroj proudu řízený proudem (CCCS).



Obr. 51: Řízené zdroje jako neregulární prvky vůči MUN.

a) VCVS, b) CCCS, c) CCVS.

Ideální operační zesilovač (IOZ) je elementární neregulární dvojbran, který má

$$a_{11} = a_{22} = 0. \quad (8.8)$$

Kaskádní matice IOZ **A** tedy obsahuje pouze nulové prvky, takže jej lze považovat za limitní případ obou předcházejících zesilovačů, jestliže jejich zesílení roste nade všechny meze ($A \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty$). V [2] jsme se naučili rozlišovat podle zapojení bran následující základní typy OA:

- Typ **OA-SISO**, s nesymetrickým vstupem a výstupem (**Obr. 52a**).
- Typ **OA-DISO**, se symetrickým vstupem a nesymetrickým výstupem (**Obr. 52b**).
- Typ **OA-SIDO**, se symetrickým vstupem a nesymetrickým výstupem (**Obr. 52c**).
- Typ **OA-DIDO**, se symetrickým vstupem a výstupem (**Obr. 52d**).

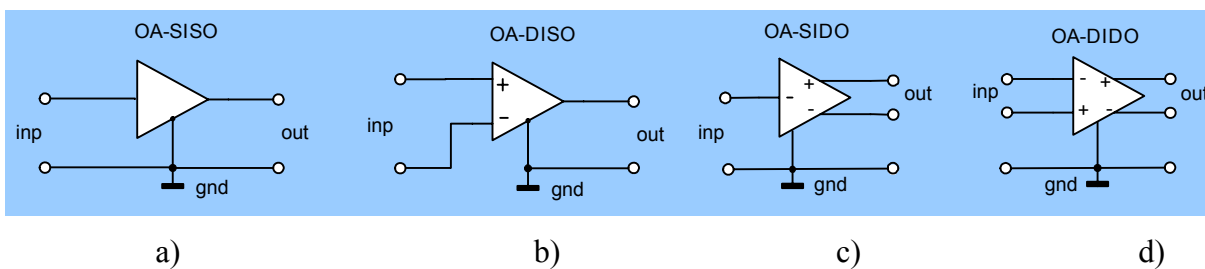
Neregulární je i **zdroj napětí řízený proudem** (CCVS) na **Obr. 51c**. Poznamenejme, že čtvrtý řízený zdroj - VCCS je regulární, má dílčí admitanční matici.

Neregulárnost těchto prvků se projevuje tím, že fungují jako transformátory souřadnic proudů i napětí (u ideálních zesilovačů pak buď pouze proudů nebo napětí), přičemž vztahy mezi jejich vstupními a výstupními proudy i napětími zůstávají nezměněny i po jejich připojení k soustavě regulárních obvodů. V případě dvojbranového IK lze psát transformační rovnice

$$U_1 = a_{11} U_2, \quad (8.9a)$$

$$I_1 = a_{22} (-I_2), \quad (8.9b) \quad (8.9)$$

Analýzu soustav s těmito transformačními bloky lze provádět různými metodami, které se od sebe liší mimo jiné i způsobem, jakým je vyjádřena neregulárnost daného obvodového prvku. V této kapitole se zaměříme na metodu lineární transformace, které již bylo použito při analýze linearizovaných soustav s regulárními obvodovými prvky.



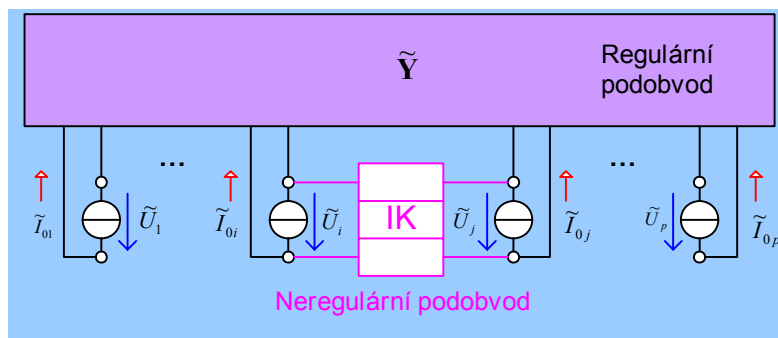
Obr. 52: Různé typy operačních zesilovačů, dle zapojení bran.

8.2 Princip analýzy založené na metodě lineární transformace

Obvod rozdělíme na **regulární** (obsahující pouze regulární prvky) a **neregulární část** podle **Obr. 53**. Regulární podobvod je popsána běžnou admitanční maticovou rovnicí

$$\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{U}}. \quad (8.10)$$

Uvažujme, že k regulárnímu bloku je z vnějšku připojen mezi i -tý a j -tý uzlový pár jeden neregulární prvek a to obecný dvojbranový **imtanční konvertor** (IK) s kaskádními parametry a_{11} , a_{22} . To má za následek přídatnou vnější vazbu mezi těmito uzlovými páry.



Obr. 53: Připojení neregulárního prvku (IK) k regulární části obvodu.

Takže napětí jednoho z těchto uzlových párů již nebude nezávislé, což lze vyjádřit lineární **transformací spojenou s redukcí** počtu nezávislých napětí. Někdy se hovoří o tzv. **kombinované transformaci**. Existují tady různé vztahy mezi souřadnicemi napětí (jako **vybuzenými** veličinami) a proudy (jako **budícími** veličinami) původní regulární podsoustavy

a souřadnicemi nové ekvivalentní soustavy, popisující celý obvod. Obecně jsou dány maticovými rovnicemi

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{C}\mathbf{U} \quad , \quad (8.11a) \quad \mathbf{I} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{I}} \quad . \quad (8.11b) \quad (8.11)$$

Z nich vyplývá i vztah pro výslednou admitanční matici $\mathbf{Y}$ této nové soustavy, která již v sobě zahrnuje také vliv připojení IK

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{C} \quad , \quad (8.12)$$

kde transformační matice $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ již nejsou vzájemně transponované a objevují se v nich i kaskádní parametry imitančního konvertoru a_{11} a a_{22} . Redukce počtu nezávislých rovnic se projeví ve tvaru transformačních matic tak, že každá z nich obsahuje jeden nulový řádek a sloupec. Takže když má původní regulární soustava (p) nezávislých uzlových párů, má jich výsledná soustava pouze $(p - 1)$, tomu odpovídají i rozměry admitančních matic.

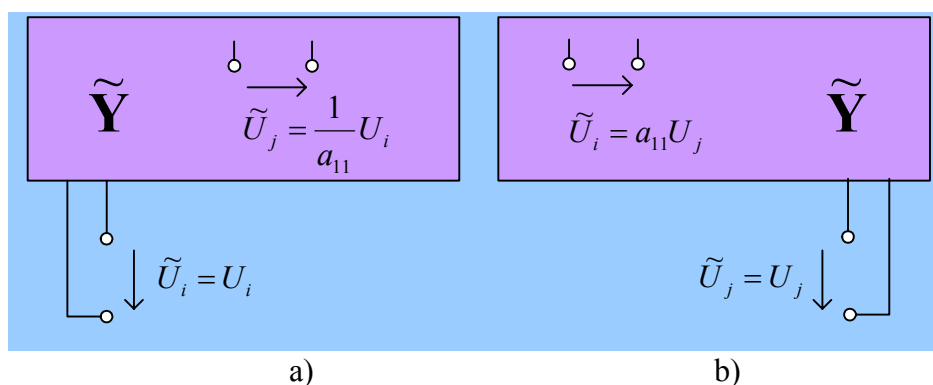
V kap.6.3 byly uvedeny jiné způsoby, jak uskutečnit lineární transformaci bez součinu tří matic (12). I tento postup se dá zde použít ovšem v modifikované podobě, protože u obecných IK $\mathbf{D} \neq \mathbf{C}^T$. Tento modifikovaný postup je výhodný prakticky pouze u soustav s ideálními transformátory.

Celý algoritmus lze zdokonalit tak, že se nejprve na základě transformačních vztahů mezi napětími sestaví matice $\mathbf{C}$ (v ní se vyskytuje kaskádní parametr a_{11}), ta se transponuje a parametr a_{11} se všude nahradí výrazem $1/a_{22}$. Takto upravená matice pak představuje transformační matici $\mathbf{D}$. Takovýto postup je přece jen dosti komplikovaný, i když pro použití na počítači je dobře algoritmizovatelný. V následující kapitole si ukážeme vhodnější postup.

8.3 Transformace pomocí operací s řádky a sloupci

Vztah (8.12) je možné vyjádřit operacemi s řádky a sloupci původní admitanční matice $\tilde{\mathbf{Y}}$. Přitom se dá výhodně vyjádřit i přídavná redukce uzlového páru, a to vynecháním příslušného řádku a sloupce. Pro soustavy s IK použijeme právě tuto metodu, která umožňuje téměř univerzální postup při analýze, poskytuje obecnější pohled na danou problematiku a je výhodná i z hlediska algoritmizace.

Vzhledem k tomu, že IK transformuje napětí nezávisle na proudech a naopak, lze i při transformaci původní admitanční matice uvažovat odděleně vztahy mezi vybuzenými veličinami (napětí) a budícími veličinami (proudy).



Obr. 54: Dvě možnosti transformace a redukce napětí způsobené připojením IK.

a) Závislé napětí $\tilde{U}_j$, b) závislé napětí $\tilde{U}_i$.

Při **transformaci napětí** jsou zřejmě dvě možnosti volby jednoho z obou napětí jako **závislého**, takže transformační rovnice (8.11) budou mít v jednotlivých případech následující tvary.

a) **Závislé $\tilde{U}_j$** - (Obr. 54a):

$$\tilde{U}_i = U_i, \quad (8.13a)$$

$$\tilde{U}_j = \frac{1}{a_{11}} U_i. \quad (8.13b) \quad (8.13)$$

Tyto transformační rovnice určují následující *operace se sloupci* původní admitanční matice regulární podsoustavy ($\tilde{\mathbf{Y}}$)

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\substack{[; \frac{1}{a_{11}} j \rightarrow i] \\ ; j}}. \quad (8.14)$$

b) **Závislé $\tilde{U}_i$** - (Obr. 54b):

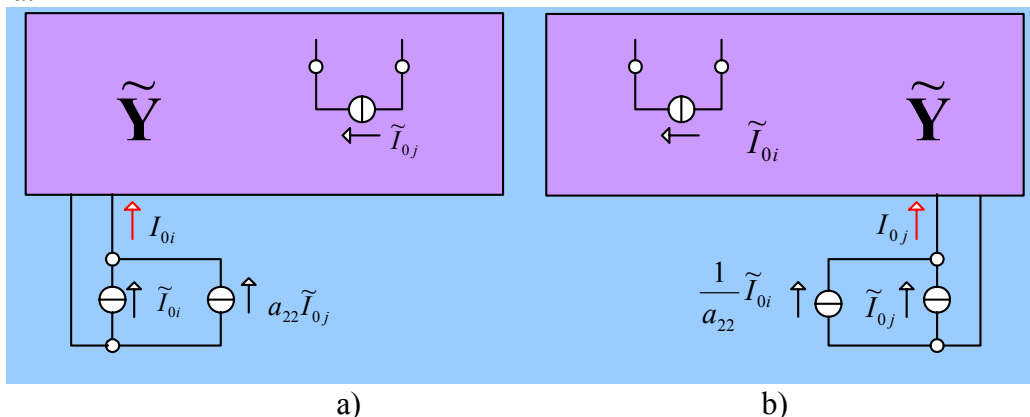
$$\tilde{U}_i = a_{11} U_i, \quad (8.15a)$$

$$\tilde{U}_j = U_i. \quad (8.15b) \quad (8.15)$$

Těmto rovnicím pak obdobně odpovídá

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\substack{[; (a_{11}) i \rightarrow j] \\ ; i}}. \quad (8.16)$$

Zápis v hranaté závorce vyjadřuje předpis pro operace se sloupci (značky jsou za středníkem), index ve spodní části pak značí vynechávaný sloupec. Tak zápis (8.16) znamená, že i -tý sloupec násobený parametrem (a_{11}) se přičte k j -tému sloupci a pak se i -tý sloupec vynechá.



Obr. 55: Dvě možnosti transformace a redukce proudů způsobené připojením IK.

a) Závislý je budící proud, b) závislý je budící proud.

Při **transformaci budících proudů** se jedná o náhradu zdrojů $\tilde{I}_{0i}$ a $\tilde{I}_{0j}$ v původní regulární soustavě (Obr. 53), jediným ekvivalentním zdrojem budícího proudu $\tilde{I}_{0i}$. A to následkem proudové vazby způsobené připojením IK. Jeden z původních budících proudů se tedy stává „závislým“ a vstupuje do výsledného ekvivalentního budícího proudu jako jedna jeho část přetransformovaná IK na svorky zdroje druhého „nezávislého“. Podle toho, který z původních budících proudových zdrojů zvolíme jako základní, na jehož svorky se bude přepočítávat proud druhého zdroje, bude mít transformační rovnice (8.11) jeden z následujících tvarů.

a) **Redukce $\tilde{I}_{0j}$** (Obr. 55a)

$$I_{0i} = \tilde{I}_{0i} + a_{22} \tilde{I}_{0j} . \quad (8.17)$$

b) **Redukce** $\tilde{I}_{0i}$ (Obr. 55b)

$$I_{0j} = (a_{22})^{-1} \tilde{I}_{0i} + \tilde{I}_{0j} . \quad (8.18)$$

Tyto transformační rovnice určují následující dvě možné operace s řádky matice $\tilde{\mathbf{Y}}$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{j; j} [(a_{22}) j \rightarrow i ;] \quad (8.19)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i; i} [\frac{1}{a_{22}} i \rightarrow j ;] \quad (8.20)$$

Použitá symbolika je stejná, podle umístění středníku je zřejmé, že jde o operace s řádky.

Pro transformaci původní admitanční matice existují pak celkem čtyři rovnocenné možnosti podle toho, které napětí a budící proud zvolíme jako závislé. Následující vzorce pro výpočet výsledné admitanční matice ekvivalentní soustavy jsou dány kombinací vztahů (8.14), (8.16) a (8.19), (8.20).

1. Závislé $\tilde{U}_j$ a $\tilde{I}_{0j}$:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j; j} [(a_{22}) j \rightarrow i ; (a_{11})^{-1} j \rightarrow i] \quad (8.21)$$

2. Závislé $\tilde{U}_i$ a $\tilde{I}_{0i}$:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{i; i} [(a_{22})^{-1} i \rightarrow j ; (a_{11}) i \rightarrow j] \quad (8.22)$$

3. Závislé $\tilde{U}_i$ a $\tilde{I}_{0j}$:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j; i} [(a_{22}) j \rightarrow i ; (a_{11}) i \rightarrow j] \quad (8.23)$$

4. Závislé $\tilde{U}_j$ a $\tilde{I}_{0i}$:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{i; j} [(a_{22})^{-1} i \rightarrow j ; (a_{11})^{-1} j \rightarrow i] \quad (8.24)$$

U prvních dvou transformačních vztahů (8.21) a (8.22) se vždy redukuje souřadnice od stejného uzlového páru, takže nový uzlový pár ekvivalentní soustavy je totožný se zbývajícím uzlovým párem původní regulární podsoustavy, pouze hodnota nového ekvivalentního budícího proudu je přepočtená. V obou dalších případech daných vztahy (8.23) a (8.24) se vždy redukuje napětí jednoho uzlového páru a budící proud druhého, takže výsledný ekvivalentní uzlový pár se neshoduje s žádným z původních uzlových párů. Pokud má IK nenulové kaskádní parametry, lze obecně použít kterýkoliv z uvedených vzorců. Obvodové funkce se pak počítají pomocí algebraických doplňků admitanční matice $\mathbf{Y}$, a to podle stejných vzorců, jako u soustav s regulárními obvodovými prvky (kap. 6.3.3).

8.4 Analýza soustav s ideálními zesilovači

Jak jsme ukázali v kap. 8.1 **ideální zesilovače** představují zvláštní případy IK, kdy některý z jeho kaskádních parametrů je roven nule. Proto je možné použít některý ze vztahů (8.21) až (8.23) i pro analýzu soustav s těmito prvky. Výjimkou je rovnice (8.24), která pro tyto zvláštní případy evidentně nemá smysl, protože by admitanční parametry neměly konečnou hodnotu.

Pro **ideální zesilovač napětí** (Obr. 51a), který má kaskádní parametry (8.6), lze využít pouze transformace (8.21) a (8.23), neboť v ostatních vztazích $(a_{22})^{-1} \rightarrow \infty$. Výsledné transformační rovnice pak mají speciální tvar

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j;j}^{[; (A)j \rightarrow i]}, \quad (8.25)$$

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j;i}^{[; (A)^{-1}i \rightarrow j]}. \quad (8.26)$$

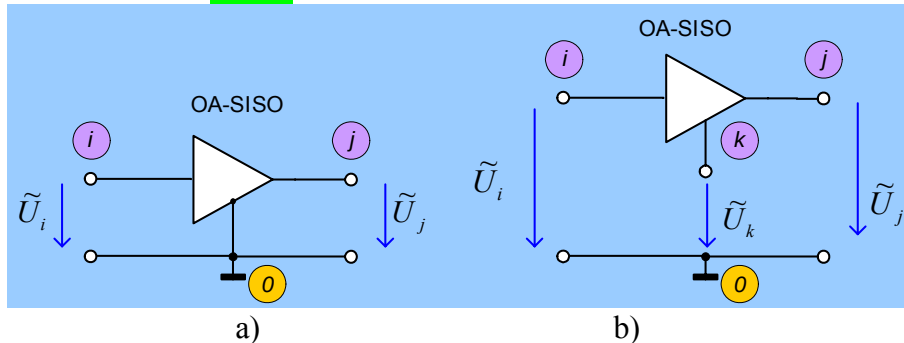
Operace se tedy provádí pouze se sloupci, zatímco operace s řádky se v obou případech redukuje na vynechání j -tého řádku, což znamená, že původní budicí proud $\tilde{I}_{0j}$ se v soustavě vůbec neuplatní, neboť ideální zesilovač napětí netransformuje proudy s konečnými hodnotami (nekonečná vstupní impedance).

Pro **ideální zesilovač proudu** (Obr. 51b), který má kaskádní parametry (8.7), lze využít pouze transformace (8.22) a (8.23), neboť v ostatních vztazích $(a_{11})^{-1} \rightarrow \infty$. Výsledné transformační rovnice pak jsou

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{i;i}^{[(B)i \rightarrow j;]}, \quad (8.27)$$

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j;i}^{[(B)^{-1}j \rightarrow i;]}. \quad (8.28)$$

V tomto případě se tedy provádějí pouze operace s řádky, zatímco operace se sloupci se zde redukuje pouze na vynechání i -tého sloupce, což vyjadřuje fyzikální skutečnost, že po připojení ideálního zesilovače proudu se vlivem jeho nulové vstupní impedance stává původní nezávislé napětí nulovým ($\tilde{U}_i = 0$).



Obr. 56: OA-SISO připojený do soustavy jako dvojbran (a) nebo trojpól (b).

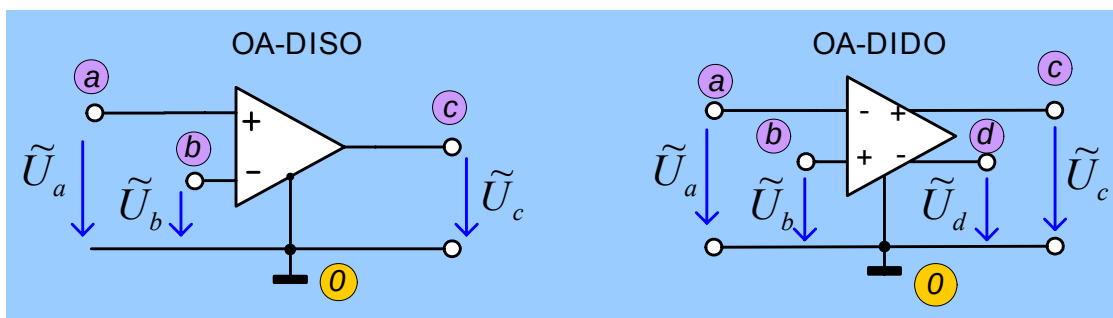
Uvažujeme, že **ideální operační zesilovač** OA-SISO (Obr. 52a) je připojen *jako dvojbran* mezi uzly i a j (Obr. 56a). Ideální OA má všechny kaskádní parametry nulové (8.8). Proto pro něj můžeme použít pouze nejobecnější transformační vztah (8.23), který má v tomto případě jednoduchý tvar

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j;i}. \quad (8.29)$$

Ideální OA tedy způsobuje v soustavě redukci jednoho proudu, čemuž odpovídá vynechání j -tého řádku (kde je norátor připojený k výstupnímu uzlovému páru) a jednoho napětí, čemuž odpovídá vynechání i -tého sloupce (kde je nulátor připojený ke vstupnímu uzlovému páru).

Je-li OA-SISO zapojen vzhledem ke vztažnému uzlu soustavy *jako trojpól* mezi uzly i , j a k (Obr. 56b), existuje devět možností volby závislých veličin, z nichž je na ukázkou uveden pouze jeden případ, kdy závislé jsou napětí $\tilde{U}_k$ a budicí proud $\tilde{I}_{0k}$. Potom lze transformaci původní admitanční matice provést pomocí vztahu

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{k;k}^{[k \rightarrow j; k \rightarrow i]} \quad (8.30)$$



Obr. 57: Zapojení moderních typů OA do soustavy.
a) OA-DISO, b) OA-DIDO.

V současnosti je velmi často používán komerčně dostupný OA-DISO (**Obr. 52b**), se symetrickým (diferenčním) vstupem a nesymetrickým výstupem. Do soustavy obvodů bývá zapojen mezi uzly **a, b, c** dle **Obr. 57a**. Při takto zvoleném označení jednotlivých uzlových párů platí pro transformaci původní regulární matice $\tilde{\mathbf{Y}}$ následující vztahy a to podle toho, které napětí zvolíme jako závislé

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{c;a}^{[;a \rightarrow b]}, \quad (8.31)$$

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{c;b}^{[;b \rightarrow a]}. \quad (8.32)$$

Ještě větší možnosti pro nové další aplikace dává typ OA-DIDO (**Obr. 52d**) s oběma bránami symetrickými a neuzemněnými. Vztažný uzel je pak mimo těchto bran a soustava původních uzlových napětí souvisejících s tímto neregulárním prvkem je na **Obr. 57d**. Pro tento případ lze transformaci matice $\tilde{\mathbf{Y}}$ provést čtyřmi následujícími způsoby:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{c;a}^{[c \rightarrow d; a \rightarrow b]}, \quad (8.33)$$

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{c;b}^{[c \rightarrow d; b \rightarrow a]}, \quad (8.34)$$

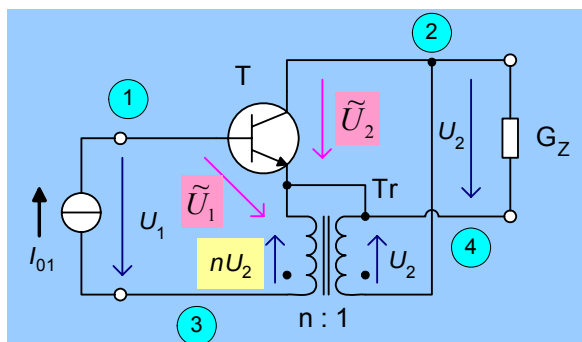
$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{d;a}^{[d \rightarrow c; a \rightarrow b]}, \quad (8.35)$$

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{d;b}^{[d \rightarrow c; b \rightarrow a]}. \quad (8.36)$$

8.5 Ilustrativní příklady řešení neregulárních obvodů

Příklad 8.1 Zesilovač s tranzistorem a s ideálním transformátorem.

U zesilovače s bipolárním tranzistorem (**Obr. 58**), který je zatížen rezistorem a obsahuje ve zpětné vazbě ideální transformátor máme vypočítat přenos napětí naprázdno K_u .



Obr. 58: Zesilovač s tranzistorem a s ideálním transformátorem.

Náznak řešení: Ve cvičení si podrobně odvodíme tuto výslednou admitanční matici

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} (1): & (\tilde{1}) \\ (2): & n(\tilde{1}), (\tilde{2}), (G_z) \end{matrix} \begin{matrix} (\tilde{1}) & n(\tilde{1}), (\tilde{2}), (G_z) \\ \hline y_{11e} & n y_{11e} + y_{12e} \\ \hline n y_{11e} + y_{21e} & n^2 y_{11e} + y_{22e} + n(y_{12e} + y_{21e}) + G_z \end{matrix} \quad (8.37)$$

Pro přenos napětí pak vychází vztah

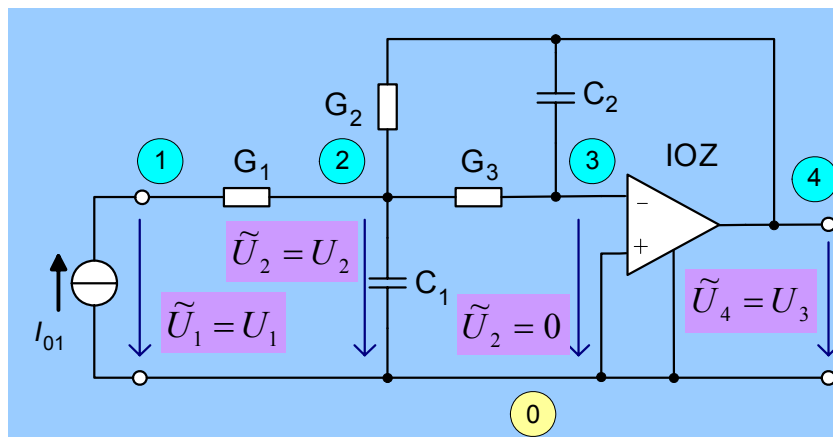
$$K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta_{1;1}} = - \frac{n y_{11e} + y_{21e}}{n^2 y_{11e} + y_{22e} + n(y_{12e} + y_{21e}) + G_z} \quad (8.38)$$

Příklad 8.2 Aktivní dolní propust RC s operačním zesilovačem.

U aktivního filtru RC s ideálním operačním zesilovačem OA-SISO na **Obr. 59** máme vypočítat přenos napětí $K_u(p) = \tilde{U}_4(p) / \tilde{U}_1(p)$.

Řešení:

Nejprve sestavíme admitanční matici $\tilde{\mathbf{Y}}$ regulární části soustavy bez IOA, a to pro zvolenou souhlasně orientovanou soustavu uzlových napětí $\tilde{U}_1$ až $\tilde{U}_4$ (**Obr. 59**).



Obr. 59: Aktivní dolní propust RC s operačním zesilovačem.

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{matrix} & \tilde{1}(1) & \tilde{2}(2) & \tilde{3} & \tilde{4}(3) \\ \begin{matrix} \tilde{1}(1) \\ \tilde{2}(2) \\ \tilde{3} \\ \tilde{4}(3) \end{matrix} & \begin{matrix} G_1 \\ -G_1 \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} -G_1 \\ pC_1 + G_1 + G_2 + G_3 \\ -G_3 \\ -G_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ -G_3 \\ pC_2 + G_3 \\ -pC_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ -G_2 \\ -pC_2 \\ pC_2 + G_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.39)$$

Výslednou admitanční matici soustavy $\mathbf{Y}$ obdržíme z transformačního vztahu (8.29), v němž položíme $i=3$ a $j=4$, tj.

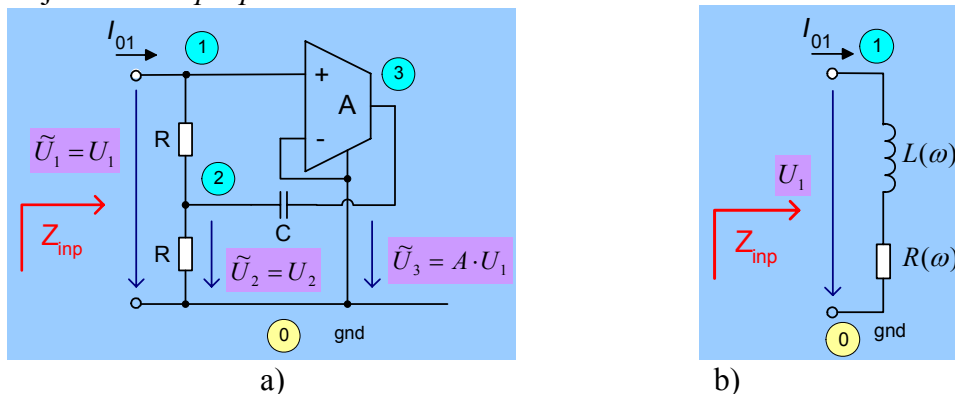
$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{4;3}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & (1): & (\tilde{2}) & (3): & (\tilde{4}) \\ \begin{matrix} (1): (\tilde{1}) \\ (2): (\tilde{2}) \\ (3): (\tilde{4}) \end{matrix} & \begin{matrix} G_1 \\ -G_1 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} -G_1 \\ pC_1 + G_1 + G_2 + G_3 \\ -G_3 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ -G_2 \\ pC_2 \end{matrix} & \end{matrix} \quad (8.40)$$

Přenos napětí pak z algebraických doplňků matice **Y** vychází

$$K_u(p) = \frac{\tilde{U}_4(p)}{\tilde{U}_1(p)} = \frac{U_3(p)}{U_1(p)} = \frac{\Delta_{1;3}}{\Delta_{1;1}} = \frac{-G_1 G_3}{p^2 C_1 C_2 + p C_2 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3}, \quad (8.41)$$

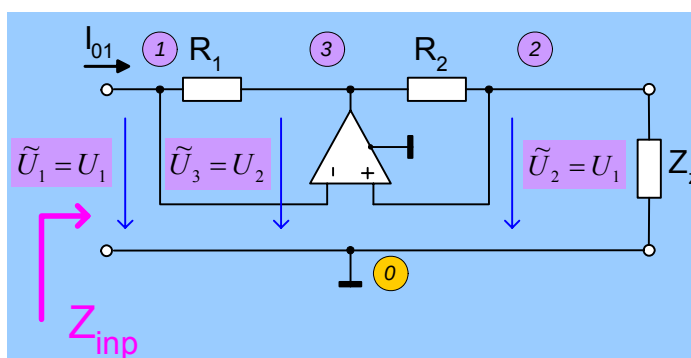
takže jde zřejmě o *dolní propust* druhého řádu.



Obr. 60: Jednoduchý syntetický induktor (a) a jeho náhradní schéma (b).

Příklad 8.3 Jednoduchý syntetický induktor.

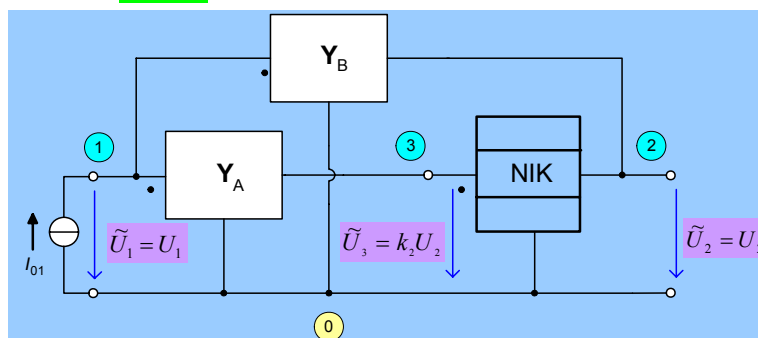
U jednoduchého Prescottova **syntetického induktoru** s ideálním zesilovačem napětí na **Obr. 60a** máme vypočítat obecné vztahy pro parametry pasivního modelu na **Obr. 60b**.



Obr. 61: Negativní imitanční konvertor s OA-DISO.

Příklad 8.4 Negativní imitanční konvertor.

Máme ukázat, že obvod na **Obr. 61** představuje negativní IK. Provedeme to tak, že obvod zatížíme dvojpólem s impedancí Z_z a vypočítáme vstupní impedanci Z_{inp} , která by měla být úměrná hodnotě $-(Z_z)$.



Obr. 62: Yangisawův přenosový dvojbřan s negativním IK.

Příklad 8.5 *Yanagisawův obvod.*

Pro dvojbran s negativním IK na **Obr. 62**, tzv. Yanagisawův obvod, máme stanovit přenos napětí naprázdno K_u .

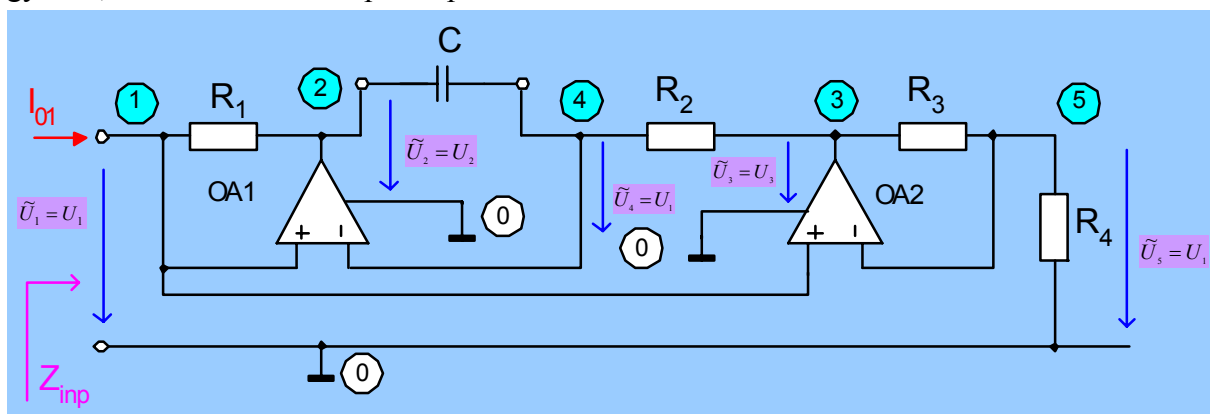
Výsledek řešení:

Odvozený přenos napětí je

$$K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{1;2}}{\Delta_{1;1}} = \frac{k_1 y_{21A} - y_{21B}}{y_{22B} - k_1 k_2 y_{22A}}. \quad (8.42)$$

Příklad 8.6 *Riordanův gyrátor.*

U obvodu se dvěma operačními zesilovači na **Obr. 63**, známém pod názvem Riordanův gyrátor, máme stanovit vstupní impedanci.



Obr. 63: Riordanův gyrátor se dvěma OA.

Výsledek řešení:

Z odvozené výsledné admitanční matice vypočítaná vstupní impedanci je

$$Z_{vst}(p) = \frac{U_1(p)}{I_{01}(p)} = \frac{\Delta_{1;1}(p)}{\Delta(p)} = \dots = pC \frac{R_1 R_2 R_4}{R_3}. \quad (8.43)$$

Takže obvod představuje na vstupní bráně uzemněný *syntetický induktor* s kmitočtově nezávislou ekvivalentní indukčností.

8.6 Kontrolní otázky z kapitoly 8

- 1) Vysvětlete způsob řešení obvodů s neregulárními prvky a funkčními bloky. Které funkční bloky jsou vůči MUN neregulární?
- 2) Uveďte definici a vlastnosti obecného imitančního konvertoru. Jak se řeší obvody s těmito prvky?
- 3) Uveďte definici a vlastnosti ideálního transformátoru a měniče výkonu. Jak se řeší obvody s těmito prvky?
- 4) Uveďte definici a vlastnosti ideálního zesilovače napětí a ideálního zesilovače proudu. Jak se řeší obvody s těmito prvky?
- 5) Uveďte definici a vlastnosti ideálního operačního zesilovače. Jak se řeší obvody s různými typy operačních zesilovačů (dle zapojení bran)?

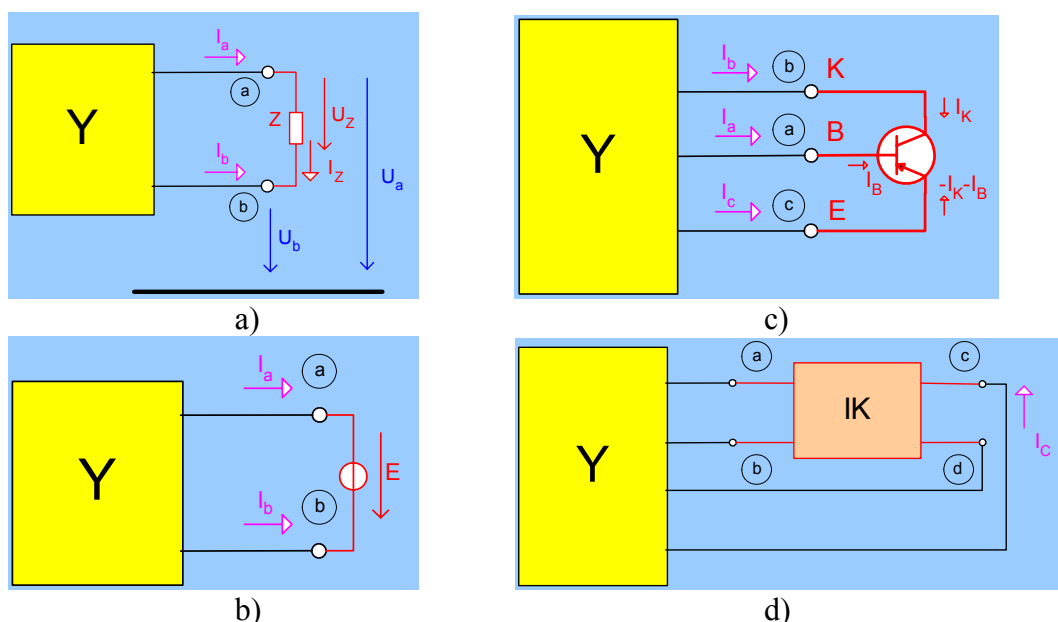
9 Metody smíšeného popisu obvodů

Cíle kapitoly: Seznámit studenty s řešením obvodů modifikovanou metodou uzlových napětí a s principem diakoptické metody. Ukázat, že obě metody mají základ ve smíšeném zobecněném popisu obvodů. Na příkladech demonstrovat výhodnost těchto metod v počítačových aplikacích, a že pro ruční řešení se více hodí předchozí metody.

9.1 Modifikovaná metoda uzlových napětí

Rozšířená (modifikovaná) MUN

- je zvláštním případem hybridního diakoptického popisu obvodů,
- jednotný algoritmus analýzy EO s regulárními i neregulárními prvky,
- každý neregulární prvek má své charakteristické „*razítko*“ (popisku),
- můžeme přímo vypočítat proud v libovolné větvi,
- soustava může obsahovat i ideální nezávislé zdroje napětí,
- metoda je vhodná pro počítačovou analýzu.



Obr. 64: Připojení dalšího prvku k regulární soustavě.

a) dvojpólu s impedancí Z , b) budícího zdroje napětí E , c) tranzistoru, d) obecného IK .

Uvažujme regulární obvod, který jsme popsali soustavou admitančních rovnic (6.15). Nyní připojíme k uzlům (a, b) novou větev s dvojpólem Z (Obr. 64a). Tuto větev lze popsat rovnicemi

$$U_a - U_b - Z \cdot I_z = 0, \quad (9.1a)$$

$$I_z = I_a = -I_b. \quad (9.1b) \quad (9.1)$$

Pro řešení spojení obou podobvodů rozšíříme vektor neznámých veličin o proud I_z (teče z a do b). V a -té rovnici (v a -tém řádku matice Y) musíme tento proud připočíst a podobně v b -té rovnici naopak odečíst, tj.

$$\begin{aligned} \dots \\ I_a &= y_{a1}U_1 + y_{a2}U_2 + \dots + y_{an}U_n + I_z \\ \dots \\ I_b &= y_{b1}U_1 + y_{b2}U_2 + \dots + y_{bn}U_n - I_z \end{aligned} \quad (9.2)$$

Zvětšení počtu neznámých musí být kryto přidáním jedné rovnice a to **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** To se dá zapsat maticově

(9.3)

	a	b	z
a			
b			
z			

 $\cdot$

 $=$

Pro zdroj napětí E (Obr. 64b) lze odvodit obdobnou popisku

(9.4)

	a	b	z
a			
b			
z			

 $\cdot$

 $=$

Složitější popisku lze odvodit i pro připojení **tranzistoru** jako regulárního trojpólu (Obr. 64c). Protože se jedná o regulární prvek je však jednodušší zahrnout jej do submatice Y. To však nelze pro jakýkoliv **neregulární prvek** (kap. 8). Uvažujme tedy nyní, že k regulárnímu obvodu, který jsme popsali soustavou admitančních rovnic, připojíme k uzlům (a, b, c, d) obecný neregulární transformační dvojbran – **impedanční konvertor** (IK), dle Obr. 64d. Obecný IK je popsán rovnicemi (8.1). S jejich uvážením lze pro napětí psát

$$U_a - U_b = a_{11}(U_c - U_d), \quad (9.5)$$

a pro proudy (při volbě I_c jako nezávislého)

$$I_a = -a_{22} I_c, \quad I_b = a_{22} I_c, \quad I_c = 1 I_c, \quad I_d = -1 I_c \quad (9.6)$$

Pro řešení spojení obou podobvodů rozšíříme vektor neznámých veličin o proud I_c a odvodíme následující **popisku (razítko) impedančního konvertoru**. Tento tvar není jediný. Vyhovuje i dalším neregulárním dvojbranům spadajícím do množiny IK, když kaskádní parametry zaměníme dle

Tab. 5.

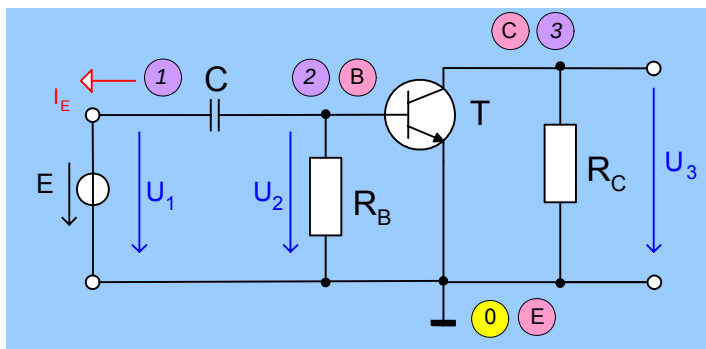
(9.7)

	a	b	c	d	IK
a					
b					
c					
d					

 $\cdot$

 $=$

Na **Obr. 66** je jednoduchý tranzistorový zesilovač v zapojení SE, který je buzen ideálním zdrojem napětí. S použitím rozšířeného popisu MUN odvoďte přenos napětí.



Obr. 66: Tranzistorový zesilovač v zapojení SE.

Výsledek:

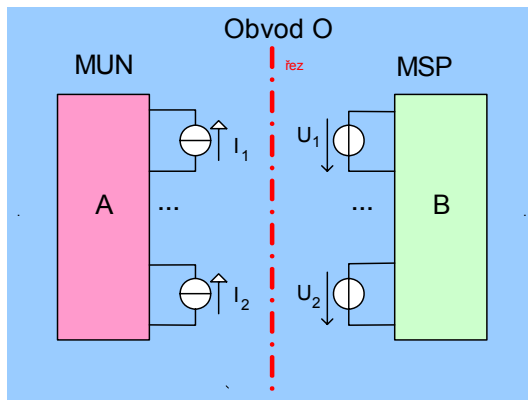
$$K_u = \frac{U_{out}}{U_{inp}} = \frac{U_3}{U_1} = \frac{\Delta_{43}}{\Delta_{41}} = -\frac{pC \cdot y_{21}}{(pC + G_B + y_{11})(G_C + y_{22}) - y_{12}y_{21}}. \quad (9.10)$$

Příklad 9.3 Prescottův syntetický induktor.

Prescottův syntetický induktor (**Příklad 8.3**) s ideálním zesilovačem napětí (**Obr. 60a**) analyzujte modifikovanou metodou uzlových napětí.

Příklad 9.4 Riordanův gyrátor.

Riordanův gyrátor (**Příklad 8.6**) se dvěma OA (**Obr. 63**) popište modifikovanou metodou uzlových napětí.



Obr. 67: Rozetnutí obvodu a jeho smíšený popis.

9.2 Diakoptická hybridní metoda

Tato metoda je založena na rozetnutí obvodu na dvě, popřípadě i více částí. V prvním případě (**Obr. 67**) uvažujeme, že obvod (**O**) je regulární. Jednu část (**A**) popíšeme MUN, druhou (**B**) MSP, při čemž jejich vzájemnou interakci podchytíme submaticí **R**. Tomu odpovídá následující maticový popis

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_A & \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T & \mathbf{Z}_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A \\ \mathbf{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{0A} \\ \mathbf{U}_{0B} \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

kde incidenční matice

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{D}_B^T = -(\mathbf{D}_A \cdot \mathbf{M}_A^T), \quad (9.12)$$

a náhradní budící zdroje jsou

$$\mathbf{I}_N = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_B, \quad (9.12a) \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{U}_A. \quad (9.12b) \quad (9.13)$$

U obvodu s neregulárními prvky budeme řez vést těmito prvky a jejich popis zahrneme do vedlejší diagonály matice smíšeného popisu, kterou pak lze zobecnit do následujícího tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_A & \mathbf{B} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{Z}_B \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Modifikovaná MUN (kap.) je jen zvláštním případem tohoto popisu. Hledané veličiny nebo obvodové funkce můžeme z matice $\mathbf{S}$ získat standardním způsobem (kap. X x), pomocí algebraických doplňků. Skladba diakoptického popisu umožňuje však produktivnější postup, kdy pracujeme s maticemi menších rozměrů. Velmi výhodné je, když matice $\mathbf{S}$ bude mít následující diagonální tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{A1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \mathbf{Y}_{A2} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Y}_{Ai} & \vdots \\ -\mathbf{A} & & & & \mathbf{Z}_B \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

Postup řešení:

1. Určíme (MUN) uzlová napětí v podobvodu **A** vybuzená zdroji $\mathbf{I}_{0A}$.

$$\mathbf{U}_{AA} = \mathbf{Y}_A^{-1} \cdot \mathbf{I}_{0A}. \quad (9.16)$$

2. Určíme náhradní zdroje napětí v podobvodu **B** způsobená buzením podobvodu **A**

$$\mathbf{U}_N = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_{AA}. \quad (9.17)$$

3. Aplikujeme MSP na podobvod **B**. Incidenční část **A** s **B** popíšeme maticí $\mathbf{Z}_{AB}$ (14). Pak smyčkové proudy jsou dány následujícím vztahem (15)

$$\mathbf{Z}_{BA} = \mathbf{Z}_B + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_A^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad (9.18)$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{Z}_{BA}^{-1} (\mathbf{U}_{0B} + \mathbf{U}_N). \quad (9.19)$$

4. Z $\mathbf{I}_B$ určíme uzlová napětí v podobvodu **A** způsobená buzením podobvodu **B**

$$\mathbf{U}_{AB} = -\mathbf{Y}_A^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}_B. \quad (9.20)$$

5. Hledaná uzlová napětí v podobvodu **A** jsou pak dána superpozicí

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{U}_{AA} + \mathbf{U}_{AB} . \quad (9.21)$$

9.3 Kontrolní otázky z kapitoly 9

- 1) Vysvětlete princip modifikované metody uzlových napětí, uveďte její přednosti a nedostatky.
- 2) Na příkladu invertujícího zesilovače s OZ ukažte řešení přenosu modifikovanou metodou uzlových napětí.
- 3) Vysvětlete princip a uveďte vlastnosti diakoptické hybridní metody řešení složitých obvodů.

10 Metoda orientovaných grafů

Cíle kapitoly: Seznámit studenty s podstatou metody, s různými druhy grafů, s jejich výhodami a konstrukcí. Na vhodných příkladech naučit je používat pro řešení obvodů

10.1 Podstata metody

Podstata této metody spočívá ve vyjádření rovnic popisujících obvod nebo systém pomocí orientovaného grafu. Pro popis obvodů se více hodí **grafy Coatesovy**, mající vlastní smyčky. **Vlastní smyčka** je uzavřená větev, která začíná a končí ve stejném uzlu a neprochází žádným jiným uzlem. Na **Obr. 68a** je takovýto jednoduchý graf odpovídající rovnici

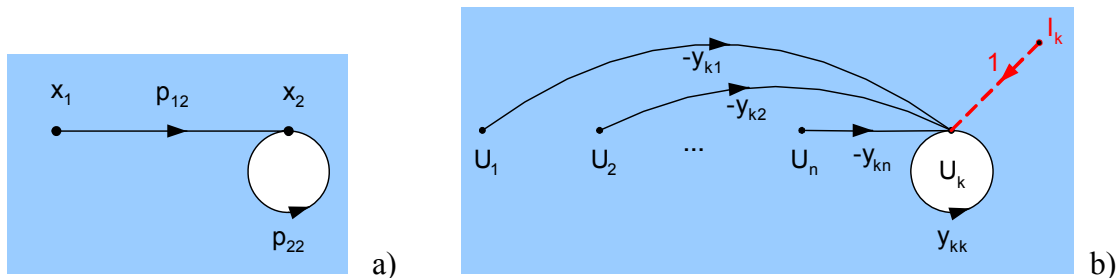
$$x_2 = p_{12}x_1 + p_{22}x_2 . \quad (10.1)$$

Do této skupiny patří i *grafy MC*, vycházející z metody uzlových napětí (kap. 6.3). Zde jistě uzlové napětí **U_k** se dá obecně vyjádřit vztahem

$$U_k = I_k + y_{kk}U_k - \sum_{i=1, i \neq k}^n y_{ki}U_i , \quad (10.2)$$

kterému odpovídá graf na **Obr. 68b**.

Při blokovém popisu systému obvodů s výhodou použijeme *grafů signálových toků* jednoduššího tvaru bez vlastních smyček (Masonovy grafy, kap. 10.5).



Obr. 68: Podstata grafů MC.

10.2 Konstrukce grafu MC

Naší snahou bude konstruovat graf bez předchozího sestavování rovnic, přímo z obvodu. Výsledný graf možno postupně složit z grafů dílčích n -pólů, ze kterých se obvod skládá. Ukážeme si grafy nejpožívanějších prvků.

Nejprve *obecný dvojbran* (tranzistor a další) popsany y -parametry (obr. 2a), nebo-li rovnicemi

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (10.3)$$

Rovnicím (10.3) odpovídá graf na **Obr. 69b**, který si lehce zapamatujeme. Poznamenejme, že mezi tímto grafem a odpovídající admitanční maticí

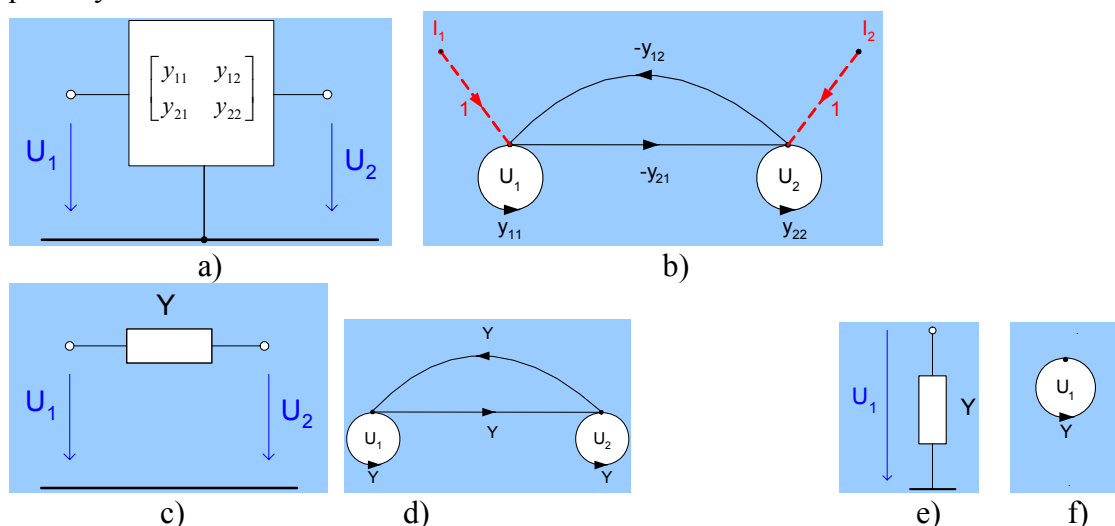
$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10.4)$$

je jednoduchá souvislost. Vlastní smyčky odpovídají prvkům v hlavní diagonále. Větvě mezi uzly mají přenos odpovídající přenosovým admitancím (naznačeno v matici barevnými šipkami) s dodatečnou inverzí znaménka.

Plovoucí dvojpól (Obr. 69c) – rezistor, kapacitor, induktor, představuje degenerovaný dvojbran, pro který z předchozího lehce odvodíme graf MC na **Obr. 69d**.

Zemněný dvojpól (Obr. 69e) má jednoduchý graf MC (**Obr. 69f**), tvořený pouze vlastní smyčkou s přenosem určeným odpovídající admitancí (např. u kapacitoru to je pC).

Tak jak se spojují uzly dílčích prvků spojují se i dílčí grafy. Paralelní větve se sdruží, přenosy se sečtou.



Obr. 69: Grafy MC nejpožívanějších prvků.

Příklad 10.1 Tranzistorový zesilovač.

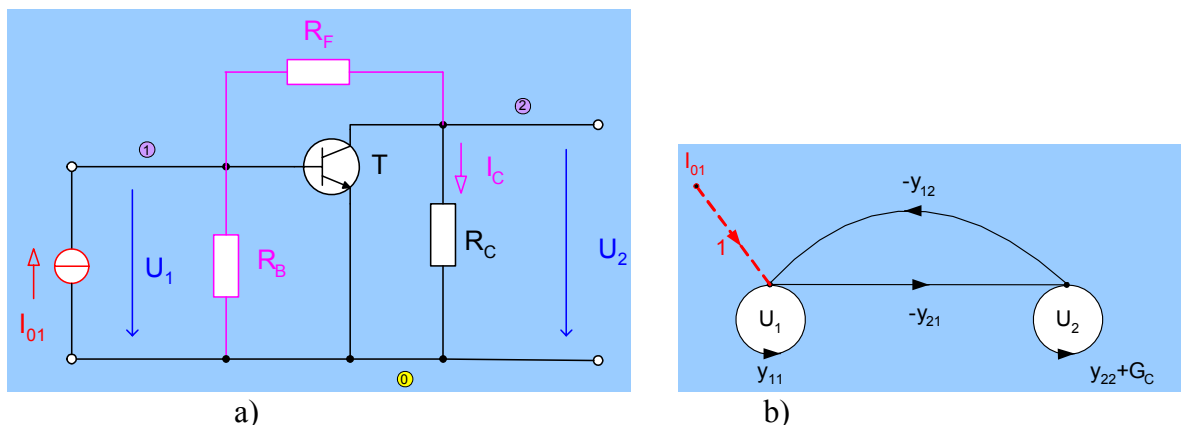
Nakreslete graf MC jednoduchého tranzistorového zesilovače (SE), jehož model je na **Obr. 70a**. Neuvažujte barevně vyznačené rezistory R_B a R_F . Tranzistor je popsán admitančními parametry SE.

Řešení:

Graf MC (**Obr. 70b**) bude mít dva uzly (U_1, U_2). Mezi ně nakreslíme graf tranzistoru (**Obr. 69b**) a pak graf zatěžovacího rezistoru R_C , což je pouze vlastní smyčka (**Obr. 69f**) s přenosem G_C . Nakonec paralelní větve sdružíme a popřípadě graf doplníme budícím proudem I_{01} (naznačeno červeně).

Příklad 10.2 Tranzistorový zesilovač doplněný rezistory.

Nakreslete graf MC tranzistorového zesilovače na **Obr. 70** i s barevně vyznačenými rezistory R_B a R_F .



Obr. 70: Tranzistorový zesilovač v zapojení SE (a) a jeho graf MC (b).

10.3 Vyhodnocení grafu MC

Neznámé napětí U_j , vybuzené proudem I_{01} , určíme pomocí následujícího vztahu

$$U_j = \frac{\sum_i^n P_{1j}^{(i)} \Delta_{1j}^{(i)} I_{01}}{\Delta}, \quad (10.5)$$

kde

n je počet cest z uzlu I_{01} do uzlu U_j ,

$P_{1j}^{(i)} = P(I_{01}, U_j)$ je přenos i -té cesty z uzlu I_{01} do uzlu U_j ,

$\Delta_{1j}^{(i)} = \Delta(I_{01}, U_j)$ je determinant části grafu, která se nedotýká i -té cesty z uzlu I_{01} do uzlu U_j ,

Δ je determinant celého grafu.

Determinant grafu nebo jeho části se určí konkrétní aplikací tohoto obecného vztahu

$$\Delta_x = V - \sum_p S_1^{(p)} V_1^{(p)} + \sum_r S_1^{(r)} V_1^{(r)} - \sum_p S_1^{(p)} V_1^{(p)} + \dots, \quad (10.6)$$

kde

V je součin přenosů vlastních smyček $V = \prod_i V_i = \prod_i y_{ii}$.

$S_1^{(p)}$ je přenos smyčky p ,

$V_1^{(p)}$ je součin přenosů vlastních smyček, které se nedotýkají smyčky p ,

$S_2^{(r)}$ je součin přenosů r -té kombinace dvou smyček, které se nedotýkají,

$V_2^{(r)}$ je součin přenosů vlastních smyček, které se nedotýkají r -té kombinace dvou smyček,

$S_3^{(s)}$ je součin přenosů s -té kombinace tří smyček, které se nedotýkají,

$V_3^{(s)}$ je součin přenosů vlastních smyček, které se nedotýkají s -té kombinace tří smyček, atd.

Poznamenejme, že v grafech kde nejsou vlastní smyčky bereme všechny odpovídající přenosy $V_i = 1$, nikoliv nulové.

Působí-li v obvodu více budících veličin I_{0j} , použijeme princip superpozice (kap. 2.2.2).

Nejžádanější obvodovou funkci – **přenos napětí** ze vstupního uzlu (1) do libovolného uzlu (j) určíme obdobně jako u maticových metod

$$K_u = \frac{U_{out}}{U_{inp}} = \frac{U_j}{U_1} = \frac{\sum_i P_{1j}^{(i)} \Delta_{1j}^{(i)}}{\Delta_1}, \quad (10.7)$$

kde

$\Delta_1 \equiv \Delta(U_1)$ je determinant části grafu, která se nedotýká vstupního uzlu.

Příklad 10.3 Přenos napětí tranzistorového zesilovače.

Vyhodnocením grafu MC na **Obr. 70b** vypočítejte přenos napětí (zesílení) tranzistorového zesilovače, jehož model je na **Obr. 70a**. Neuvažujte barevně vyznačené rezistory R_B a R_E .

Řešení:

Aplikací vztahu (10.7) na graf MC (**Obr. 70b**) dostáváme

$$K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sum_i P_{12}^{(i)} \Delta_{12}^{(i)}}{\Delta_1} = \frac{P(U_1, U_2) \cdot \Delta(U_1, U_2)}{\Delta(U_1)} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + G_C}. \quad (10.8)$$

Určování dalších obvodových funkcí si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 10.4 Další obvodové funkce tranzistorového zesilovače.

Pomocí upraveného grafu MC vypočítejte *přenos proudu* a *vstupní impedanci* tranzistorového zesilovače, který jsme řešili v předchozím příkladu (**Příklad 10.3**).

Řešení:

Graf MC na **Obr. 70b** doplníme o část odpovídající rovnici $I_C = U_2 G_C$, určující proud zatěžovacím rezistorem R_C (**Obr. 71**). **Přenos (zesílení) proudu** pak získáme následujícím vyhodnocením upraveného grafu na **Obr. 71**

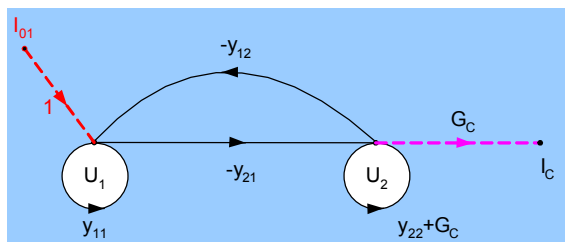
$$K_u = \frac{I_C}{I_{01}} = \frac{P(I_{01}, I_C) \cdot \Delta(I_{01}, I_C)}{\Delta} = \frac{-y_{21} G_C}{y_{11}(y_{22} + G_C) - y_{12} y_{21}}. \quad (10.9)$$

Vstupní impedance pak

$$Z_{inp} = \frac{U_1}{I_{01}} = \frac{P(I_{01}, U_1) \cdot \Delta(I_{01}, U_1)}{\Delta} = \frac{1 \cdot (y_{22} + G_C)}{y_{11}(y_{22} + G_C) - y_{12} y_{21}}. \quad (10.10)$$

Stejný výsledek dostaneme vyhodnocením zjednodušeného grafu (bez I_{01}) použijeme-li vztah

$$Z_{inp} = \frac{U_1}{I_{01}} = \frac{\Delta(U_1)}{\Delta} = \frac{(y_{22} + G_C)}{y_{11}(y_{22} + G_C) - y_{12} y_{21}}. \quad (10.11)$$



Obr. 71: Upravený graf MC tranzistorového zesilovače (**Obr. 70**).

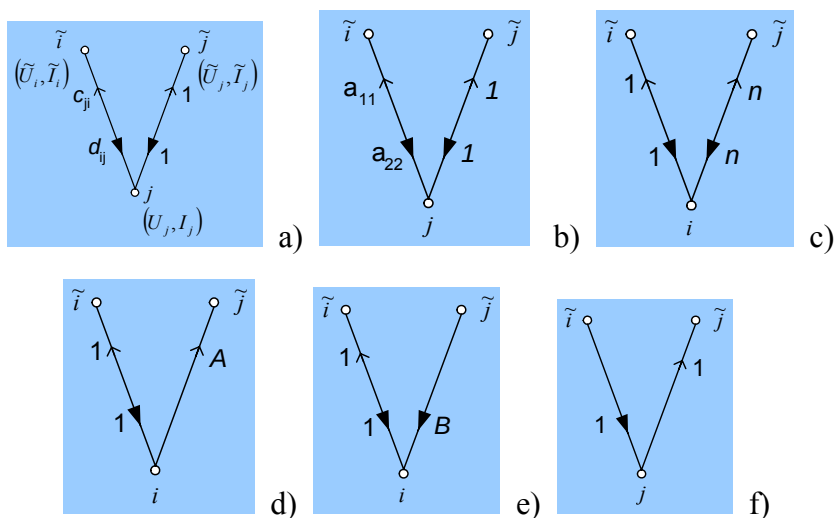
10.4 Transformační grafy neregulárních prvků

S řešením neregulárních obvodů, pomocí transformace kombinované s redukcí souřadnic, jsme se seznámili v kap. 8. V grafech MC tomu odpovídají **transformační grafy T** (**Obr. 72**), postihující vliv připojení neregulárních prvků k původní regulární soustavě. Skládají se ze dvou částí proudové (d_{ij} v **Obr. 72a**) a napěťové (c_{ij} v **Obr. 72a**).

Obecný neregulární dvojbran, připojený k původním uzlům $\tilde{i}$ a $\tilde{j}$ (jsou značené vlnovkou), způsobí transformaci a redukcí původních veličin (jedno napětí a jeden proud). Redukci $(\tilde{U}_i, \tilde{I}_i)$ zachycuje graf T na **Obr. 72a**. Je to jeden ze čtyř možných grafů T obecného neregulárního dvojbranu, který je možno pro jistý dvojbran blíže konkretizovat, dosazením za obecné parametry (d_{ij}, c_{ji}) .

Při častější aplikaci této metody využijeme konkrétní T-grafy uvedené na **Obr. 72** pro vybrané typy neregulárních prvků (např. T graf operačního zesilovače je uveden na **Obr. 72f**). Jejich použití si ukážeme na následujících příkladech.

Pomocí grafů T převedeme původní graf MC ($\tilde{Y}$) regulární části obvodu na nový graf MC (Y), zahrnující i neregulární (transformační) prvky (obr. 7). Větev (vlastní smyčka) výsledného grafu (Y) je tvořena jednou větví z napěťové části grafu T (c_{ji}), jednou větví nebo vlastní smyčkou z původního grafu ($\tilde{Y}$) a jednou větví z proudové části grafu T (d_{ij}). Dojde-li transformací k přeměně větve na vlastní smyčku nebo naopak, nutno změnit znaménko přenosu.



Obr. 72: Transformační grafy neregulárních prvků.

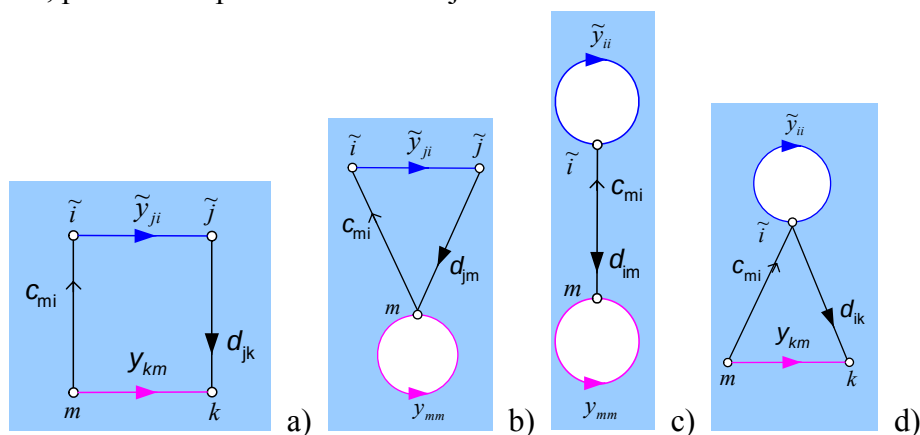
- | | |
|--|---|
| a) T graf neregulárního dvojbranu, | b) T graf obecného impedančního konvertoru, |
| c) T graf ideálního transformátoru, | d) T graf ideálního zesilovače napětí, |
| e) T graf ideálního zesilovače proudu, | f) T graf operačního zesilovače. |

Příklad 10.5 Obvod s operačním zesilovačem.

Postup analýzy s grafy T si ukážeme na jednoduchém obvodu s operačním zesilovačem na **Obr. 65**, který jsme jiným způsobem řešili v příkladu **Příklad 9.1**. Určit máme přenos napětí a vstupní impedanci.

Řešení:

Nejprve sestrojíme graf MC ($\tilde{Y}$), regulární části obvodu (jen R_1 a R_2). Na **Obr. 74** je nakreslen tento graf v horní části modře. Poznamenejme, že při určité praxi tento graf ani celý nekreslíme, pouze si ho představíme nebo jen částečně naznačíme.



Obr. 73: Použití grafu T pro získání výsledného grafu MC.

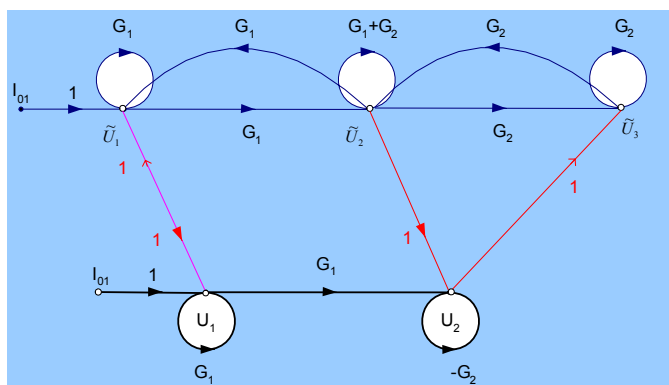
- a) Transformace větve na větev, b) transformace větve na vlastní smyčku,
c) vlastní smyčky na vlastní smyčku, d) transformace vlastní smyčky na větev.

V druhém kroku nakreslíme graf T. OZ je připojen mezi uzly 2 a 3. Jeho graf T (**Obr. 72f**) proto nakreslíme mezi tyto uzly: $\tilde{i} = \tilde{U}_2$, $\tilde{j} = \tilde{U}_3$, $j = U_2$. Uzel $\tilde{U}_1$ se transformuje beze změny na U_1 , což zachytíme větví s $c_{11} = d_{11} = 1$. Na **Obr. 74** je graf T nakreslen červeně.

Transformací modrého grafu MC přes červený graf T, způsobem vysvětleným na **Obr. 73**, dostáváme výsledný graf MC, popisující celý obvod. Ten je na **Obr. 74** je nakreslen v dolní části černě. Jeho vyhodnocením dle kap. 10.3 obdržíme již známé obvodové funkce

$$K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{P(U_1, U_2) \Delta(U_1, U_2)}{\Delta(U_1)} = \frac{G_1 \cdot 1}{-G_2}, \quad (10.12)$$

$$Z_{inp} = \frac{U_1}{I_{01}} = \frac{\Delta(U_1)}{\Delta} = \frac{-G_2}{-G_2 G_1} = \frac{1}{G_1}.$$



Obr. 74: Konstrukce grafu MC obvodu s OZ.

Příklad 10.7 Příčkový článek.

Popište rovnicemi smíšeného popisu rezistivní příčkový článek na **Obr. 76a**. Z nich odvoďte graf M, jako vhodný model tohoto obvodu. Jeho vyhodnocením určete výstupní napětí (U_4).

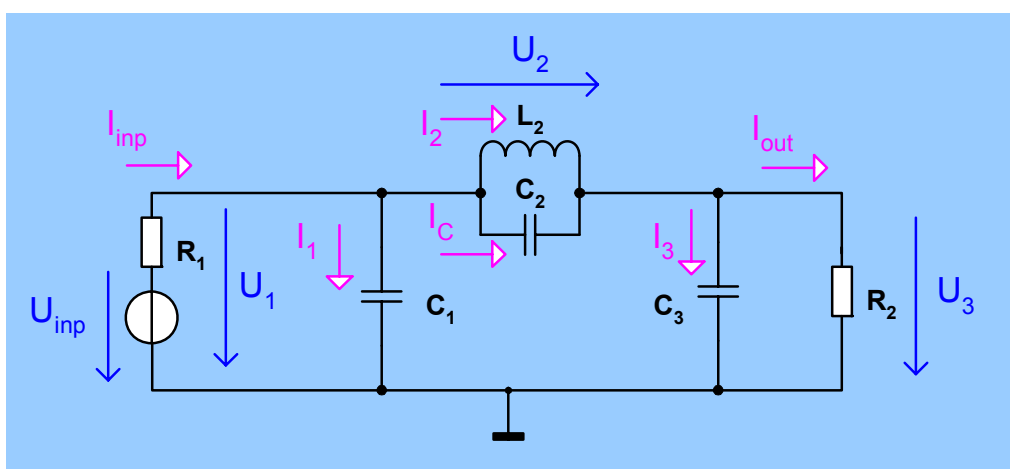
Náznak řešení:

Napišeme rovnice smíšeného popisu, postihující příčinu a následek toku signálu. Z nich odvodíme graf M na **Obr. 76b**. Vyhodnocením tohoto grafu, aplikací vztahu (10.5), určíme hledanou veličinu U_4 . Pomůcka:

$$U_4 = \frac{P(U_{inp}, U_4) \cdot \Delta(U_{inp}, U_4)}{\Delta} U_{inp},$$

$$\Delta(U_{inp}, U_4) = 1,$$

$$\Delta = 1 - S_1 - S_2 - S_3 + S_1 S_3.$$
(10.14)



Obr. 77: Pasivní LCR filtr příčkové struktury.

Příklad 10.8 Pasivní LCR filtr příčkové struktury.

Na **Obr. 77** je Cauerův pasivní filtr LCR, 3. řádu, příčkové struktury. Odvoďte pro něj graf M, vycházející ze stavového popisu.

Řešení:

Je podrobně uvedeno v [3], kde najdete i další aplikace grafů signálových toků.

Příklad 10.9 Obvod s transkoduktory.

Za použití grafu M určete přenosovou funkci obvodu s transkoduktory na **Obr. 78a**. Diskutujte co obvod představuje.

Řešení:

Na vstupu, v uzlu (1) dochází k sumaci proudů. První transkoduktor (CD-1) realizuje proudový distributor (rozdělovač proudů v uzlu 2). Další transkoduktory doplněné kapacitory realizují proudové integrátory výstupy (3, 4, 5) a s dílčím přenosem

$$I_{out} = \pm \frac{1}{s} \frac{g_m}{C} I_{inp}.$$
(10.15)

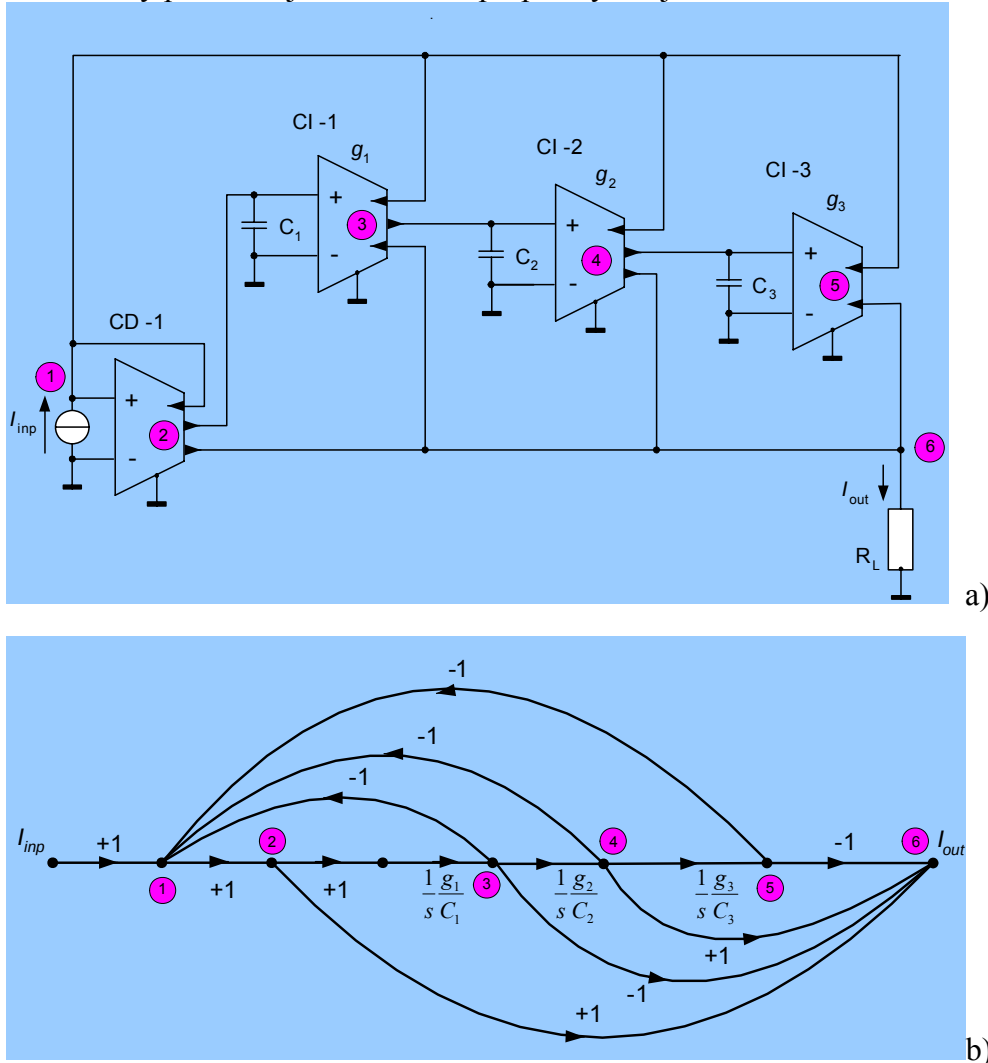
Na zátěži R_L , v uzlu (6) dochází k sumaci proudů. Na základě těchto poznatků nakreslíme proudový graf M (**Obr. 78b**). Jeho vyhodnocením dostáváme přenosovou funkci proudu

$$K_i = \frac{I_{out}}{I_{inp}} = \frac{P_1(I_{inp}, I_{out})P_1(I_{inp}, I_{out})P_1(I_{inp}, I_{out})}{1 - S_1 - S_2 - S_1} = -\frac{a_0 - a_1s + a_2s^2 - a_3s^3}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3}. \quad (10.16)$$

kde

$$a_0 = \frac{g_1 g_2 g_3}{C_1 C_2 C_3}, \quad a_1 = \frac{g_1 g_2}{C_1 C_2}, \quad a_2 = \frac{g_1}{C_1 C_2}, \quad a_3 = 1.$$

Obvod tedy představuje fázovací všepropustný dvojbran třetího řádu.



Obr. 78: Obvod s transkoduktory.
a) Schéma zapojení, b) odpovídající graf M.

10.6 Kontrolní otázky z kapitoly 10

- 1) Vysvětlete podstatu metody řešení obvodů grafy signálových toků. Jaké grafy používáme? Uveďte výhody a nevýhody této metody.
- 2) Vysvětlete princip konstrukce grafu MC. Jak graf souvisí s admitanční maticí obvodu?
- 3) Uveďte jak z grafu určujeme neznámé napětí a obvodové funkce.
- 4) Vysvětlete jak v grafech MC řešíme obvody s neregulárními prvky.
- 5) Vysvětlete co jsou to grafy signálových toků a jak je používáme k řešení obvodů.

11 Elektronický obvod jako soustava

Cíle kapitoly: Seznámit studenty s lineární dynamickou soustavou představující elektronický obvod, její charakteristickou rovnicí, řešením stability a oscilačních podmínek, se zpětnou vazbou a jejím vlivem na vlastnosti obvodu.

11.1 Obvod jako lineární dynamická soustava

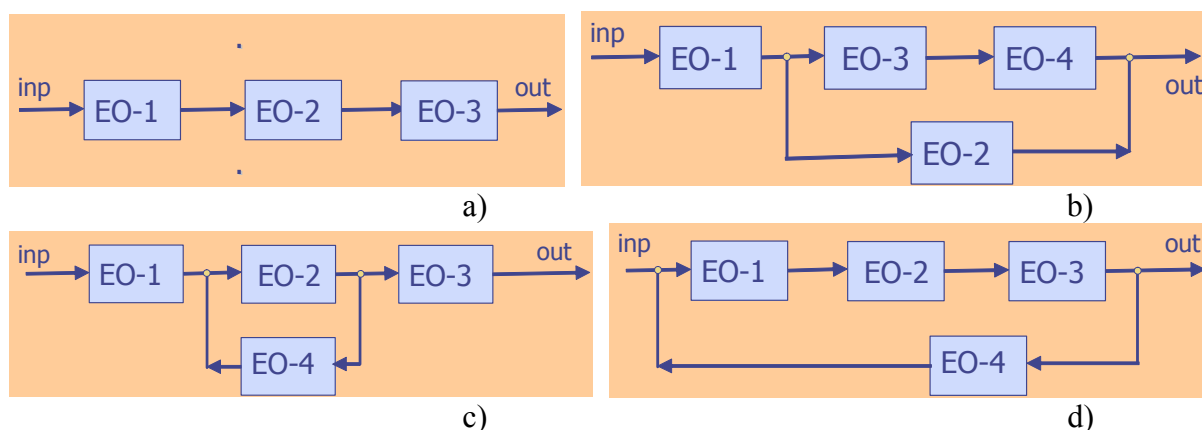
Složitější elektronický obvod lze chápat tak, že se skládá z jistých podobvodů a že tak představuje **dynamickou soustavu**. V této soustavě sledujeme časové průběhy konečného počtu obvodových veličin a jejich vzájemnou interakci. Nejčastěji nás zajímá odezva soustavy na určité buzení. Většinou uvažujeme, že zpracovávané signály jsou malé a soustavu lze považovat za **lineární**.

V kap. 3.1 jsme si ukázaly, že obvod zpracovávající signál řešíme jako dvojbran tak, že separujeme zdroj signálu a zátěž (**Obr. 12**). Tuto myšlenku lze zobecnit i na složitější **neuzavřenou soustavu**. Vnější buzení je tvořeno několika nezávislými zdroji napětí a proudů. Soustava pak zajišťuje žádanou interakci na oddělené zátěži.

Podobvody tvořící soustavu mohou být zapojeny **kaskádně** (**Obr. 79 a**). Tehdy pro celkový přenos napětí platí jednoduchý vztah

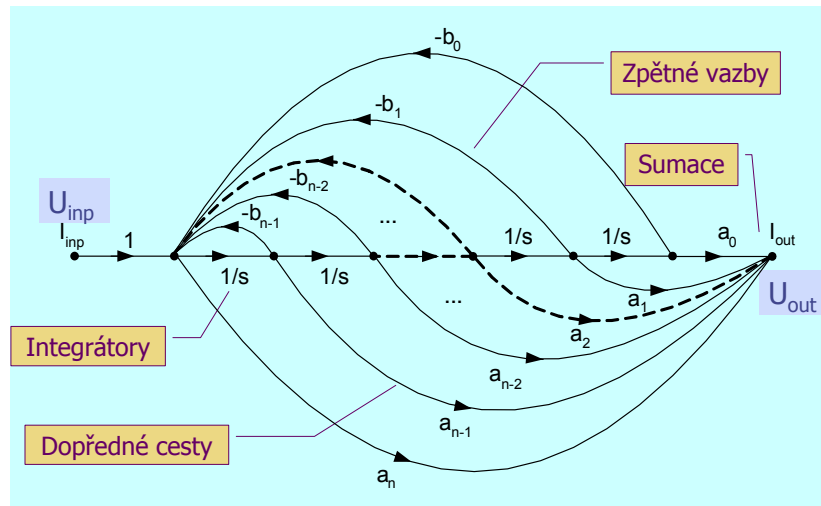
$$K_U = \prod_{i=1}^n K_{U_i} \quad (11.1)$$

Nekaskádní spojení může být různé. Může se v něm vyskytovat několik *dopředných* cest (**Obr. 79 b**). Často se v soustavě vyskytují i *zpětné* cesty signálu (**Obr. 79 c,d**) – hovoříme o **zpětné vazbě** (**ZV**) v obvodu (kap. 11.6).



Obr. 79: Spojení podobvodů v soustavu.

Složitě zapojení s výhodou modelujeme grafem signálových toků (kap. 11.3). Pro realizaci libovolné přenosové funkce použijeme strukturu s více smyčkami ZV a integrátory, jako základním stavebním blokem. Obecnou přenosovou funkci n -tého (3.5) řádu můžeme takto realizovat obvodem, jehož model je na **Obr. 80**. Jde o jednu z **kanonických struktur** označovanou **FLF-OS** (Follow the leader feedback - output summation).



Obr. 80: Model soustavy kanonické struktury FLF-OS.

11.2 Obecné vlastnosti přenosové soustavy obvodů

11.2.1 Ideální přenosová soustava

Za **ideální přenos** považujeme, když signál $u_2(t)$ na výstupu soustavy má pouze jinou amplitudu než vstupní signál $u_1(t)$ (s konstantní úměrou A) a je časově zpožděn o t_0 (nemůže předbíhat) Tuto podmínku lze v **časové oblasti** definovat vztahem

$$u_2(t) = A u_1(t - t_0) . \quad (11.2)$$

Podmínku (11.2) lze převést (s využitím LT) do kmitočtové oblasti

$$U_2(s) = A U_1(s) e^{-s t_0} , \quad \text{resp.} \quad U_2(j\omega) = A U_1(j\omega) e^{-j\omega t_0} , \quad \text{neboli} \quad (11.3)$$

$$U_2(j\omega) = K_u(j\omega) U_1(j\omega) = A e^{-j\omega t_0} U_1(j\omega) .$$

Porovnáním pak vyplynou dvě podmínky pro vlastnosti ideální přenosové soustavy v **kmitočtové oblasti** a to ve formě jednoduchých vztahů pro modulovou a argumentovou kmitočtovou charakteristiku

$$K(\omega) = A , \quad (11.4a) \quad \varphi(\omega) = -\omega t_0 . \quad (11.4b) \quad (11.4)$$

Věta 11.1 *Kmitočtové charakteristiky ideální přenosové soustavy.*

Modulová charakteristika ideální přenosové soustavy je přímka rovnoběžná s osou kmitočtů. Argumentová charakteristika je přímka procházející počátkem souřadnic a má zápornou směrnici ($-t_0$).

Fázové zpoždění soustavy je definováno jako poměr

$$t_0 = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} . \quad (11.5)$$

Fáze signálu na výstupní bráně je oproti fázi vstupního signálu zpožděna o hodnotu ωt_0 .

Skupinové zpoždění pak jako záporná derivace argumentové charakteristiky

$$t_g = - \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega} . \quad (11.6)$$

Věta 11.2 *Zpoždění ideální přenosové soustavy.*

Ideální přenosová soustava má konstantní fázové zpoždění nezávislé na kmitočtu, které se rovná skupinovému zpoždění.

Teoreticky by obě tyto věty měly platit v nekonečném rozsahu kmitočtů ($0 \leq \omega \leq \infty$). Prakticky potřebný kmitočtový rozsah závisí na šířce spektra přenášeného signálu.

11.2.2 Souvislost mezi časovými a kmitočtovými charakteristikami

V časové oblasti posuzujeme vlastnosti obvodu podle tvaru přechodné nebo impulsové charakteristiky. **Přechodná charakteristika** $h(t)$ je odezva (x₂) linearizovaného obvodu na jednotkový skok $x_1(t) = 1(t)$ přivedený na vstupní bránu (x je napětí nebo proud). U dvojpólu jde pak zpravidla o odezvu proudu na jednotkový skok napětí, či naopak, takže se hovoří o tzv. přechodné admitanci či impedanci. **Impulsová charakteristika** $g(t)$ je obdobná odezva na jednotkový impuls $x_1(t) = \delta(t)$ (Diracovu distribuci).

Tyto charakteristiky lze vypočítat z přenosové funkce

$$g(t) = LT^{-1}\{K(s)\} , \quad h(t) = LT^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} . \quad (11.7)$$

Známe-li přenosovou funkci $K(s)$ v symbolickém tvaru (3.7), resp. průběh kmitočtové závislosti její reálné $\text{Re}[K(j\omega)]$ a imaginární složky $\text{Im}[K(j\omega)]$, můžeme přechodnou charakteristiku vypočítat dle následujících vztahů

$$h(t) = K(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[K(j\omega)]}{\omega} \cos(\omega t) d\omega ,$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}[K(j\omega)]}{\omega} \sin(\omega t) d\omega . \quad (11.8)$$

Obdobné vztahy platí i pro charakteristiku impulsovou. Získáme je derivací vztahů (11.8). Uvedené rovnice se používají při numerickém výpočtu $h(t)$ nebo $g(t)$ na počítači. Bližší rozbor a odvození těchto vztahů lze nalézt v [1] a [5]. Tyto rovnice jsou důležité nejen pro praktické výpočty, ale i pro další teoretické úvahy.

11.2.3 Podmínky realizovatelnosti přenosové soustavy

Protože $h(t)$ je v rovnicích (11.8) vyjádřena buď pomocí reálné nebo imaginární části přenosu, je zřejmé, že mezi nimi musí u fyzikálně realizovatelných soustav existovat určitý vztah. Srovnáme-li obě rovnice (11.8) obdržíme po úpravách podmínku realizovatelnosti těchto soustav

$$\int_0^{+\infty} \{ \text{Re}[K(j\omega)] \cos(\omega t) + \text{Im}[K(j\omega)] \sin(\omega t) \} d\omega = 0 , \quad (11.9)$$

což lze vyjádřit také pomocí modulové $K(\omega)$ a argumentové $\varphi(\omega)$ charakteristiky ve tvaru

$$\int_0^{+\infty} K(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega = 0. \quad (11.10)$$

Tyto vztahy formulují **obecné podmínky**, které musí splňovat $\operatorname{Re} [K(j\omega)]$ a $\operatorname{Im} [K(j\omega)]$ resp. $K(\omega)$ a $\varphi(\omega)$, u realizovatelné přenosové soustavy. Je tedy zřejmé, že při syntéze obvodu nelze libovolně zadat současně obě kmitočtové charakteristiky.

Dosadíme-li do (11.10) jednoduché výrazy pro ideální přenosovou soustavu z kap. 11.2.1, snadno zjistíme, že této podmínce nevyhovuje. Z toho vyplývá, že obvod ideálních vlastností nelze realizovat v celém kmitočtovém rozsahu. V praxi však postačuje, když je tato podmínka s dostatečnou přesností splněna v daném intervalu kmitočtů tak, aby pokryla spektra zpracovávaných signálů.

11.2.4 Obvody s minimálním a neminimálním argumentem

Podmínka realizovatelnosti (11.10) představuje jistou integrální transformaci, která není jednoznačná. Pro určitý průběh modulové charakteristiky $K(\omega)$ může existovat mnoho obvodů s různými argumentovými charakteristikami $\varphi(\omega)$.

Dá se ukázat, že jeden z nich má na každém kmitočtu vždy nejmenší hodnotu argumentu ze všech. Takovýto obvod budeme nazývat s **minimálním argumentem**, resp. s minimální fází. Ostatní pak jsou obvody s **neminimálním argumentem**.

Příklad 11.1 Obvod 1. řádu s minimální fází.

Vyšetřeme průběh argumentové kmitočtové charakteristiky jednoduchého obvodu s přenosovou funkcí 1. řádu ve tvaru

$$K(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad (a, b > 0). \quad (11.11)$$

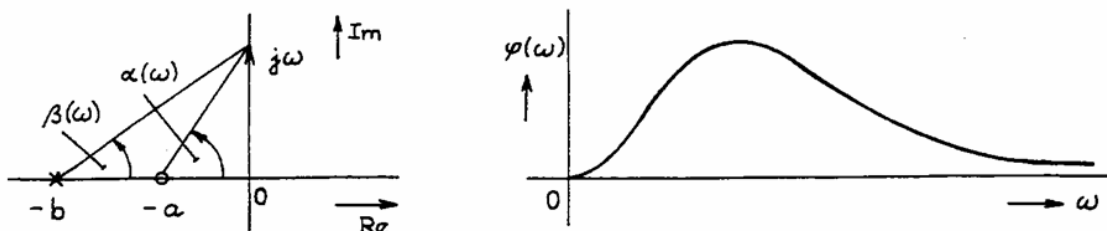
Řešení:

Přenosová funkce (11.11) má jeden pól a jeden nulový bod v levé polovině komplexní roviny, jak je naznačeno na **Obr. 81a**. Jedná se tedy o obvod s **minimálním argumentem**. Převodem (11.11) do symbolického komplexního tvaru dostáváme

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\text{kde } K(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2}}, \quad \text{a } \varphi(\omega) = \alpha(\omega) - \beta(\omega). \quad (11.12)$$

Fázový posuv na určitém kmitočtu (ω_i) je určen dílčími argumenty čitatele α_i a jmenovatele β_i , jak je naznačeno na **Obr. 81a**. Měníme ω a vyneseme do grafu $\varphi(\omega)$. Obdrželi jsme typický průběh argumentové kmitočtové charakteristiky na **Obr. 81b**.



Obr. 81: Obvod 1. řádu s minimální fází..

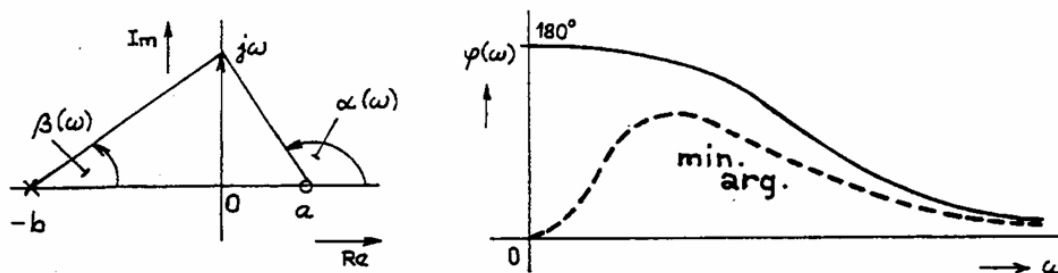
Příklad 11.2 Obvod 1. řádu s neminimální fází.

Nyní vyšetříme průběh argumentové charakteristiky, změníme-li znaménko ve čitateli (11.11), tedy na

$$K(s) = \frac{s-a}{s+b}, \quad (a, b > 0). \quad (11.13)$$

Řešení:

Poloha pólu zůstane zachována, avšak nulový bod se přesune do pravé poloviny komplexní roviny (**Obr. 82a**). V tomto případě jde o obvod s **neminimálním argumentem**. Obdobným způsobem odvodíme argumentovou charakteristiku na **Obr. 82b**. Z něj je zřejmé, že hodnota fázového posuvu je vždy větší než v předchozím **Příklad 11.1** (příslušný průběh je naznačen v tomtéž grafu čárkovaně).



Obr. 82: Obvod 1. řádu s neminimální fází..

Výsledek těchto příkladů se dá zobecnit do následující věty.

Věta 11.3 *Obvody s minimálním a neminimálním argumentem.*

Leží li **všechny nulové body v levé polovině komplexní roviny** (kap. 3.3), tj. když číselník přenosové funkce (3.7) je Hurwitzovým polynomem, jedná se o obvod s **minimálním argumentem**.

Pokud alespoň jeden nulový bod leží v pravé polovině komplexní roviny, jde již o obvod s neminimálním argumentem. U stabilního obvodu všechny póly leží v levé polovině komplexní roviny (kap. 11.5).

11.2.5 Hilbertova transformace

U obvodů s minimálním argumentem je jednoznačný vztah mezi reálnou a imaginární částí, resp. mezi modulem a argumentem, přenosové funkce. Tyto relace jsou dány speciální integrální transformací, která se nazývá **Hilbertova transformace** [5]. Vždy jedna charakteristika je explicitně dána pomocí integrálu charakteristiky druhé. Přesněji řečeno jeden bod charakteristiky je tak dán integrací příspěvků celé charakteristiky druhé. Tak lze argumentovou charakteristiku vypočítat z modulové

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln K(u)}{u - \omega} du. \quad (11.14)$$

A nebo inverzně modulovou charakteristiku z argumentové

$$\ln K(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u - \omega} du. \quad (11.15)$$

Podobné vztahy platí pro reálné či imaginární části přenosové funkce [5]. Výpočty na základě těchto vzorců se zpravidla provádí numericky, na počítači. Pro jednodušší tvary charakteristik lze použít také graficko-analytické metody uvedené v [5].

11.2.6 Všeprůstné fázeovací dvojbrany

Typickými představiteli obvodů s neminimálním argumentem jsou tzv. **všeprůstné fázeovací dvojbrany** (ve starší české lit. zvané *fázevací články*, v západní lit. pak *all-pass filters*). Umožňují korigovat průběh argumentové charakteristiky určité soustavy a to beze změny charakteristiky modulové.

U těchto obvodů leží všechny nulové body v pravé polovině komplexní roviny a navíc jsou symetrické s póly přenosové funkce vzhledem k imaginární ose [5]. Modulová charakteristika je konstantní, argumentová charakteristika se mění monotónně a je dána příspěvky od jednotlivých pólů a nulových bodů.

Všeprůstné fázeovací dvojbrany se dají realizovat jako obvody pasivní LCR nebo jako aktivní obvody RC s OZ [3]. U obvodů prvního řádu má přenosová funkce tvar (11.13), přičemž platí, že $a = b$. Přenosová funkce fázeovacího dvojbranu 2. řádu má obecný tvar

$$K(p) = K_0 \frac{s^2 - b_1 p + b_0}{s^2 + b_1 p + b_0}. \quad (11.16)$$

Fázevací obvody vyšších řádů lze sestavit kaskádním spojením zmíněných obvodů 1. a 2. řádu. Další podrobnosti lze nalézt v literatuře [3], [10] aj.

11.3 Uzavřená soustava a její popis

Uzavřenou lineární dynamickou soustavu lze popsat homogenní lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (11.17)$$

kde x je vybraná obvodová veličina.

Rovnici (11.17) lze zobecnit a chápat ji jako rovnici vektorovou, kde $\vec{x}$ je vektor obvodových veličin. Laplaceovou transformací této rovnice dostaneme její obraz

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)X(s) = 0 \quad (11.18)$$

Za předpokladu, že $X(s) \neq 0$, pak se musí nule rovnat mnohočlen v závorce, tedy platí

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) = 0 \quad (11.19)$$

Vztah (11.19) se nazývá **charakteristická rovnice soustavy**. Mnohočlen charakteristické rovnice, který označíme obecně $R(s)$, můžeme rozložit na součin kořenových činitelů

$$R(s) = a_n \prod_{k=1}^n (s - p_k) = 0. \quad (11.20)$$

Charakteristickou rovnici můžeme také získat z popisu lineárního obvodu metodou uzlových napětí. Uvážíme-li ve vztahu $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$, že soustava není buzena $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, pak uvedená rovnice má netriviální řešení ($\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$), když položíme determinant matice $\mathbf{Y}$ roven nule

$$\det \mathbf{Y} = \Delta = 0. \quad (11.21)$$

Věta 11.4: *Získání charakteristické rovnice z popisu obvodu.*

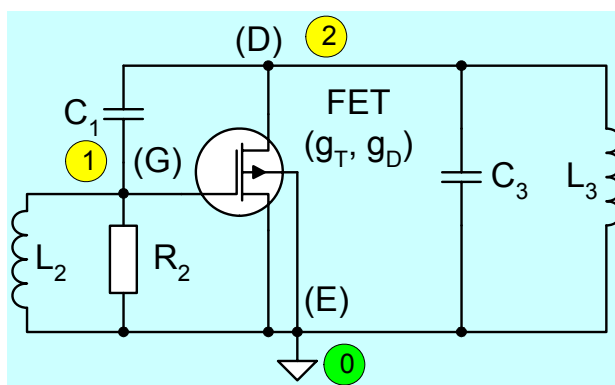
Charakteristickou rovnici tedy získáme, sestavíme-li admitanční matici obvodu, vypočítáme její determinant a položíme jej roven nule.

Poznamenejme, že obdobná věta platí pro matici impedanční nebo hybridní. Charakteristickou rovnici však můžeme získat i jinak, platí totiž následující věta.

Věta 11.5: *Získání charakteristické rovnice z přenosu napětí*

Známe-li u soustavy, chápané jako dvojbran (kap. 3.1), přenos napětí (3.1), který je obecně dán jako podíl dvou polynomů (3.5), pak charakteristickou rovnici získáme z jeho jmenovatele položením $D(s) = 0$.

Charakteristická rovnice popisuje základní vlastnosti obvodu, zda je obvod stabilní či nikoliv. Určuje přechodné děje v této soustavě. A to nejen v soustavě uzavřené (nebuzené), ale i v odpovídající soustavě buzené. U buzené soustavy musíme však uvažovat i vliv vnějších obvodů - budících zdrojů a zátěže. V případě buzení zdroji napětí (předpokládáme ideální), musíme při určování charakteristické rovnice vstupní bránu zkratovat.



Obr. 83: Aktivní obvod 4. řádu.

Příklad 11.3: Aktivní obvod 4. řádu a jeho charakteristická rovnice.

Na **Obr. 83** je lineární autonomní obvod s unipolárním tranzistorem a čtyřmi akumulacími prvky, tedy obvod 4. řádu. FET je modelován parametry g_T a g_D . Odvoďte charakteristickou rovnici obvodu.

Řešení:

Metodou uzlových napětí sestavíme admitanční matici tohoto obvodu.

$\mathbf{Y} =$	(1): (G)	(2): (D)	(11.22)
(1): (G)	$sC_1 + G_2 + \frac{1}{pL_2}$	$-sC_1$	
(2): (D)	$g_T - sC_1$	$sC_1 + g_D + \frac{1}{sL_3}$	

Vypočítáme determinant této matice a položíme ho roven nule

$$\det \mathbf{Y} = \Delta = \left(sC_1 + G_2 + \frac{1}{sL_2} \right) \left(sC_1 + g_D + \frac{1}{sL_3} \right) - (g_T - sC_1)(-sC_1) = 0, \quad (11.23)$$

čímž dostaneme hledanou charakteristickou rovnici, kterou dále upravíme do tvaru

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (11.24)$$

kde jednotlivé koeficienty jsou dány následujícími symbolickými vztahy

$$a_0 = 1, \quad a_1 = G_2 L_2 + g_D L_3, \quad a_2 = L_3 (C_1 + C_3) + L_2 (C_1 + G_2 L_3 g_D), \quad (11.25)$$

$$a_3 = L_2 L_3 [C_1 (G_2 + g_D + g_T) + C_3 G_2],$$

$$a_4 = C_1 C_3 L_2 L_3 .$$

Přechodný děj v soustavě obvodů může být:

- aperiodický,
- periodický (kmitavý)
 - tlumený,
 - netlumený (oscilace).

11.4 Oscilační podmínky

Za určitých okolností mohou v obvodě vzniknout oscilace. **Oscilační podmínky**, kdy je obvod na mezi stability, dostaneme obecně tak, že do charakteristické rovnice (11.19) dosadíme za proměnnou $s = j\omega$ a rovnici rozložíme na reálnou a imaginární část

$$\operatorname{Re} [R(j\omega)] = 0, \quad \operatorname{Im} [R(j\omega)] = 0. \quad (11.26)$$

Tyto dvě oscilační podmínky jsou základem lineární teorie oscilátorů. Často jsou modifikovány do tvaru **podmínky modulové**

$$\operatorname{Mod} [R(j\omega)] = 0, \quad (11.27)$$

a **podmínky fázové**

$$\operatorname{Arg} [R(j\omega)] = k \cdot 360^\circ, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.28)$$

V případě **obvodů se zpětnou vazbou** vztah pro charakteristickou rovnici (11.19) přechází do následujícího tvaru

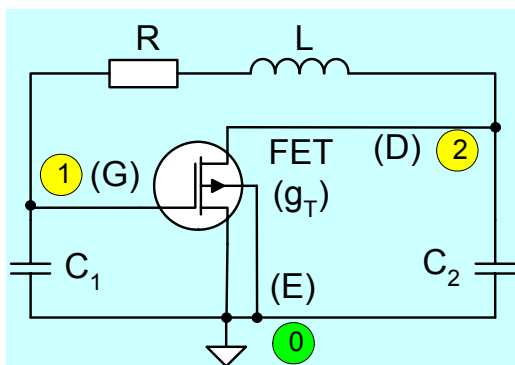
$$R(s) = 1 - \beta(s) A(s) = 0. \quad (11.29)$$

Pak oscilační podmínky lze upravit do další velmi používané modifikace. Pro **podmínku modulovou**

$$\operatorname{Mod} [\beta(j\omega) A(j\omega)] = \beta A = 1, \quad (11.30)$$

a **argumentovou (fázovou)**

$$\operatorname{Arg} [\beta(j\omega) A(j\omega)] = \varphi_A + \varphi_B = k \cdot 360^\circ, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.31)$$



Obr. 84: Colpittsův oscilátor

Příklad 11.4: Oscilační podmínky v Colpittsově obvodu.

Stanovme oscilační podmínky u Colpittsova oscilátoru [2], jehož zjednodušené principiální schéma je na **Obr. 84**. Unipolární tranzistor je zde modelován pouze přenosovou vodivostí g_T

Řešení:

Obdobně jako v předchozím příkladě nejprve sestavíme admitanční matici uvažovaného obvodu z **Obr. 84**.

		(1): (G)	(2): (D)	
$\mathbf{Y} =$	(1): (G)	$sC_1 + \frac{1}{sL + R}$	$-\frac{1}{sL + R}$	(11.32)
	(2): (D)	$g_T - \frac{1}{sL + R}$	$sC_2 + \frac{1}{sL + R}$	

Vypočítáme její determinant a položíme ho roven nule, čímž získáme charakteristickou rovnici

$$\det \mathbf{Y} = \Delta = \left(sC_1 + \frac{1}{sL + R} \right) \left(sC_2 + \frac{1}{sL + R} \right) - \left(g_T + \frac{1}{sL + R} \right) \left(-\frac{1}{sL + R} \right). \quad (11.33)$$

Úpravou pak

$$s^3 C_1 C_2 L + s^2 C_1 C_2 R + s (C_1 + C_2) + g_T = 0. \quad (11.34)$$

Dosadíme za proměnnou $s = j\omega$ a charakteristickou rovnici rozložíme na reálnou a imaginární část, čímž získáme dvě hledané podmínky oscilací. Reálná část

$$- \omega^2 C_1 C_2 R + g_T = 0, \quad (11.35)$$

a imaginární část charakteristické rovnice

$$- j\omega^3 C_1 C_2 L + j\omega (C_1 + C_2) = 0. \quad (11.36)$$

Z druhé oscilační podmínky můžeme vypočítat kmitočet generovaného signálu

$$\omega_{osc} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}. \quad (11.37)$$

11.5 Stabilita soustav linearizovaných obvodů

Soustava obvodů je stabilní, když přechodný děj v ní po určitém čase skončí. Budíme-li obvod jednotkovým impulsem $\delta(t)$, jehož Laplaceův obraz $\text{LT} [\delta(t)] = 1$, pak výstupní napětí

$$U_2(s) = K(s) \cdot 1 = \frac{P(s)}{R(s)} \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t} \quad (11.38)$$

kde p_k jsou póly přenosu a kořeny charakteristické rovnice. Zpětnou Laplaceovou transformací dostaneme časový průběh

$$u_2(t) = \sum_{k=1}^n U_k e^{p_k t}. \quad (11.39)$$

Libovolně dlouhý přechodný děj i tak jednou skončí, takže v limitě $t \rightarrow \infty$ bude $u_2(t) = 0$ a podle (11.39) to bude tehdy, když pro kořeny p_k bude platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_k t} = 0. \quad (11.40)$$

Z uvedeného vyplývá důležitý závěr, který můžeme použít jako následující větu.

Věta 11.6: *Základní kritérium pro posouzení stability.*

U stabilní soustavy obvodů kořeny charakteristické rovnice (póly přenosové funkce) musí ležet v levé otevřené polovině roviny s , nebo-li $\operatorname{Re}[p_k] < 0$.

Další nutná, nikoliv však postačující, podmínka stabilní soustavy je dána následující větou.

Věta 11.7: *Podmínka stabilní soustavy.*

Polynom charakteristické rovnice (11.19) má všechny **součinitele** (a_n) **kladné**, je tzv. striktním **Hurwitzovým polynomem**.

Leží-li jednoduché kořeny (póly) na imaginární ose, je soustava **na mezi stability**. **Nestabilní** je taková soustava, jejíž póly leží v pravé polovině roviny p a nebo vícenásobné póly leží na imaginární ose.

Znalost rozložení kořenů charakteristické rovnice, a tím posouzení stability dané soustavy obvodů, dnes umožňuje řada matematických programů (MathCAD, MATLAB aj.). Přesto si ukážeme některá jednoduchá kritéria a algoritmy vyšetřování stability linearizované soustavy obvodů.

11.5.1 Nyquistovo kritérium

Stabilitu **soustavy se zpětnou vazbou**, s přenosovou funkcí a kmitočtově závislými parametry

$$K(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 - \beta(j\omega)A(j\omega)}, \quad (11.41)$$

lze posoudit z průběhu hodografu $T(j\omega)$ **přenosu otevřené smyčky**

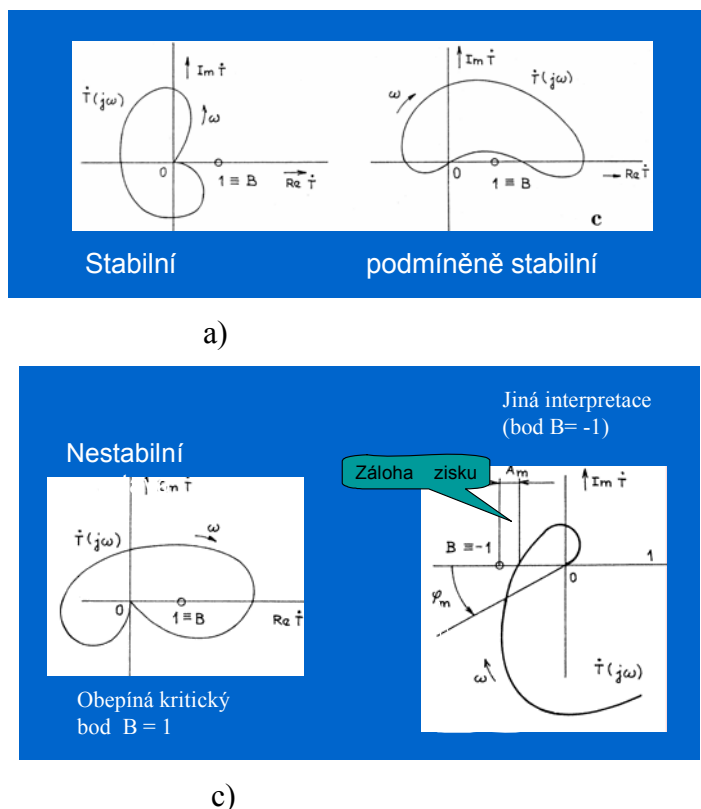
$$T(j\omega) = 1 - \beta(j\omega)A(j\omega). \quad (11.42)$$

Věta 11.8: *Nyquistovo kritérium.*

Soustava se zpětnou vazbou je stabilní když hodograf $T(j\omega)$ přenosu otevřené smyčky, při změně kmitočtu $0 \leq \omega \leq \infty$ neobepne **kritický bod** $B \equiv [1, j0]$.

Tak je tomu v případě na **Obr. 85a**, kde bod B leží vně uzavřené plochy hodografu $T(j\omega)$. Je-li tomu naopak a kritický bod B leží uvnitř plochy (**Obr. 85b**), soustava je nestabilní. Na **Obr. 85c** je případ hodografu tzv podmíněně stabilní soustavy. Při nepatrné změně parametrů obvodu se kritický bod může lehce dostat dovnitř uzavřené plochy a soustava se stane nestabilní. Tomuto stavu se v praxi pochopitelně vyhýbáme.

Poznamenejme, že někteří interpreti Nyquistova kritéria uvažují činitel zpětné vazby $\beta < 0$, přenos (11.41) má ve jmenovateli znaménko plus a kritický bod pak je $\hat{B} \equiv [-1, j0]$ (**Obr. 85d**). Z průběhu hodografu $T(j\omega)$ můžeme také rozhodnout o **záloze zisku** A_m resp. o **záloze fáze** φ_m , kterou máme, než se stane soustava nestabilní, díky změně některých jejích parametrů.



Obr. 85: Nyquistovo kritérium.

11.5.2 Bodeho kritérium

Je to další praktické kritérium, aplikovatelné na **soustavu se zpětnou vazbou**, kdy známe modulovou kmitočtovou charakteristiku zpětnovazebního dvojbranu $\beta(j\omega)$. Modulovou kmitočtovou charakteristiku vyšetřovaného dvojbranu A vyjádříme v decibelech

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log A(\omega) \quad (11.43)$$

a podle Bodeho ji aproximujeme lomenou přímkou (Obr. 86: Vyšetřování stability Bodeho kritériem.

). Do tohoto tzv. **Bodeho diagramu** zakreslíme charakteristiku zpětnovazebního dvojbranu β

$$\beta_{dB}^{-1}(\omega) = 20 \log \frac{1}{\beta(\omega)} \quad (11.44)$$

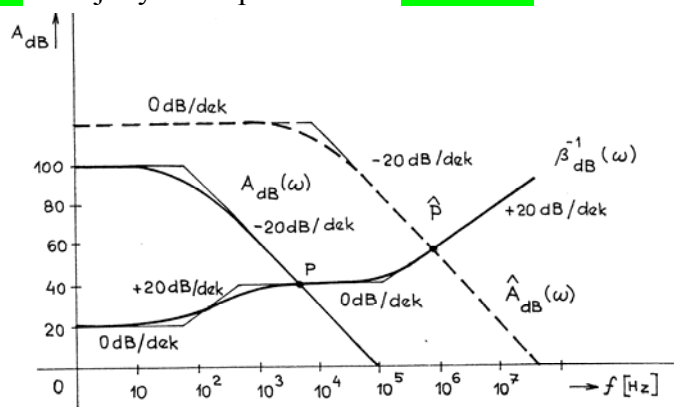
aproximovanou také lomenou přímkou (Obr. 86). Podle Bodeho kritéria pak zkoumáme, jak se tyto charakteristiky ve svém průsečíku P vzájemně přibližují.

Věta 11.9: Bodeho kritérium

Obvod bude stabilní pokud **rychlost vzájemného přibližování** modulové charakteristiky přímého přenosu a inverzního přenosu zpětné vazby bude před jejich průsečíkem **rovna nebo menší než 20 dB/dek**.

V jiném případě, při větší rychlosti vzájemného přibližování (a to již od 40 dB/dek) je fázová bezpečnost nulová a obvod se zcela jistě rozkmitá.

Na **Obr. 86** je tedy bod P stabilní (rychlost přibližování je 20 dB/dek). To odpovídá vhodně vybranému aktivnímu prvku (OZ). Při změně aktivního prvku, který má větší zesílení a vyšší mezní kmitočet a modulovou charakteristiku $A_{dB}(\omega)$ nakreslenou čárkovaně, bude průsečík až v bodě $\hat{P}$. Zde je rychlost přibližování 40 dB/dek a soustava je nestabilní.



Obr. 86: Vyšetřování stability Bodeho kriteriem.

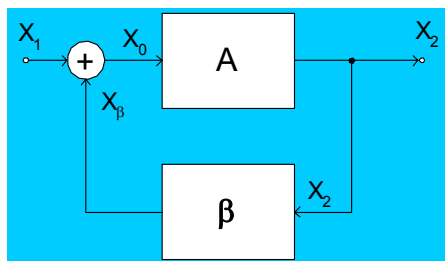
11.6 Zpětná vazba v elektronických obvodech

Zpětná vazba (ZV) má pro analogové obvody velký význam. Pomocí ní můžeme realizovat obvody s vysokou stabilitou a lineární pracovní charakteristikou, i když samotné dílčí prvky jsou nelineární a velmi nestabilní. Pomocí ZV lze také dosáhnout podstatných změn parametrů a obvodových funkcí původního obvodu (např. zesilovače).

ZV se široce využívá, aniž si to uvědomujeme, i v jiných dynamických (technických i přírodních) soustavách. Úmyslně byla ZV poprvé použita a také teoreticky rozebrána právě v elektrotechnice (teorie oscilátorů, úprava vlastností zesilovačů). Daleko větší pozornosti a rozpracování se jí však dostalo v kybernetice a teorii řízení.

11.6.1 Princip zpětné vazby

Jak samotný název zpětné vazby říká, část výstupního signálu (X_2) se přivádí zpět (**Obr. 87**), jako zpětnovazební signál (X_1), přes zpětnovazební členek (převážně pasivní kmitočtově závislý) s přenosem β na vstupní bránu obecného dvojbranu s přenosem A , a to buď ve fázi nebo v protifázi se vstupním signálem (X_1).



Obr. 87: Blokové schéma soustavy se zpětnou vazbou.

Ve složitých analogových obvodech rozlišujeme **lokální ZV** (**Obr. 79c**) a **globální ZV** (**Obr. 79d**) nebo-li malé a velké smyčky ZV. Velké smyčky ZV obepínají celý obvod a především určují (vylepšují) jeho vlastnosti. V několika stupňovém obvodu lokální ZV slouží především ke stabilizaci pracovních bodů jednotlivých stupňů. Vedle úmyslně zavedených

ZV existují i nežádoucí ZV (např. dané zpětným přenosem tranzistoru) a také ZV parazitní a neodstranitelné, které se snažíme pouze potlačit..

11.6.2 Základní rovnice zpětné vazby

V blokovém schématu soustavy se ZV (**Obr. 87**) je vlastní dvojbran (**4**) obecně popsán přenosem

$$A = \frac{X_2}{X_1}. \quad (11.45)$$

Zpětnovazební člen (**β**) je obdobně přenosem

$$\beta = \frac{X_\beta}{X_2} \quad (11.46)$$

kde signály **X** mohou být jak napětí (**U**) tak i proudy (**I**). Oba tyto přenosy jsou obecně funkcemi kmitočtu **A(p)**, **β(p)** resp. **A(jω)**, **β(jω)**. V součtovém členu (**Obr. 87**) se získá signál

$$X_0 = X_I + X_2 \quad (11.47)$$

Přenos celé soustavy se ZV lze odvodit následujícím způsobem

$$K = \frac{X_2}{X_1} = \frac{X_2}{X_0 - X_\beta} = \frac{\frac{X_2}{X_0}}{1 - \frac{X_\beta}{X_0} \frac{X_2}{X_0}} = \frac{A}{1 - \beta A} \quad (11.48)$$

Získali jsme velmi užitečný **Blackův vztah** (11.48). Z něj je patrné, že ZV výrazně ovlivňuje výsledný přenos soustavy **K**. Ten může být větší nebo menší než původní přenos samotného dvojbranu **A** (bez ZV). Podle toho rozlišujeme ZV **kladnou** (**K > A**) nebo ZV **zápornou**. Bližší dělení ZV je včetně potřebných vztahů uvedeno v **Tab. 6**.

V případě silné záporné ZV je přenos celé soustavy (11.48) dán pouze zpětnovazebním činitelem (**β**). Pak kmitočtové vlastnosti celé soustavy jsou dány pouze vlastnostmi zpětnovazebního obvodu (**β**) a dvojbran **A** vlastnosti soustavy skoro vůbec neovlivňuje. To platí např. v obvodech s operačním zesilovačem, kde **A** je velmi velké, ale již od jednotek Hz je kmitočtově závislé, proto skoro vždy zavádíme silnou zápornou ZV, kde **K = - 1/β**.

Tab. 6: Základní rozdělení zpětných vazeb.

Druh ZV	Přenos otevřené smyčky	Vratný rozdíl	Přenos v soustavě
kladná ZV	$0 < \beta A < 1$	$ 1 - \beta A < 1$	$K > A$
oscilace	$\beta A = 1$	$ 1 - \beta A = 0$	$K = \infty$
záporná ZV	$\beta A < 0$	$ 1 - \beta A > 1$	$K < A$
silná záporná ZV	$ \beta A \gg 1$	$ 1 - \beta A \approx -\beta A$	$K = -1/\beta$
bez ZV	$\beta A = 0$	$ 1 - \beta A = 1$	$K = A$

11.6.3 Druhy zpětné vazby dle zapojení

Podle způsobu propojení dvojbranů **A**, **β** zátěže **Z** a budicího zdroje rozlišujeme ZV:

a) dle zapojení vstupů:

- ZV sériová,
- ZV paralelní,

b) dle zapojení výstupů:

- ZV proudová,
- ZV napěťová.

Blíže viz. následující tabulka **Tab. 7**.**Tab. 7:** Rozdělení zpětných vazeb dle zapojení.

	napěťová ZV $\dot{s}_\beta = \beta \dot{u}_2$	proudová ZV $\dot{s}_\beta = \beta \dot{i}_2$
sériová ZV $\dot{u}_0 = \dot{u}_1 + \dot{u}_\beta$		
	$\dot{A} = \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_0}, \dot{\beta} = \frac{\dot{u}_\beta}{\dot{u}_2}, \dot{K} = \frac{\dot{u}_2}{\dot{u}_1}$	$\dot{A} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{u}_0}, \dot{\beta} = \frac{\dot{u}_\beta}{\dot{i}_2}, \dot{K} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{u}_1}$
paralelní ZV $\dot{i}_0 = \dot{i}_1 + \dot{i}_\beta$		
	$\dot{A} = \frac{\dot{u}_2}{\dot{i}_0}, \dot{\beta} = \frac{\dot{i}_\beta}{\dot{u}_2}, \dot{K} = \frac{\dot{u}_2}{\dot{i}_1}$	$\dot{A} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1}, \dot{\beta} = \frac{\dot{i}_\beta}{\dot{i}_2}, \dot{K} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1}$

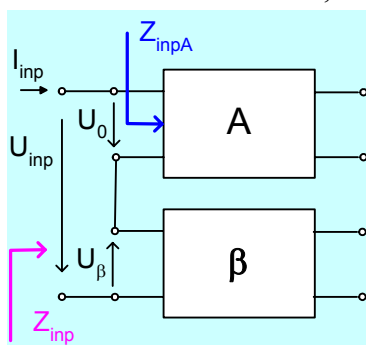
11.6.4 Vliv zpětné vazby na parametry obvodu

Vstupní impedance soustavy se zpětnou vazbou je určena zapojením vstupních bran dvojbranů $\dot{A}$, $\dot{\beta}$. Pro **sériovou ZV** na **Obr. 88a** odvodíme

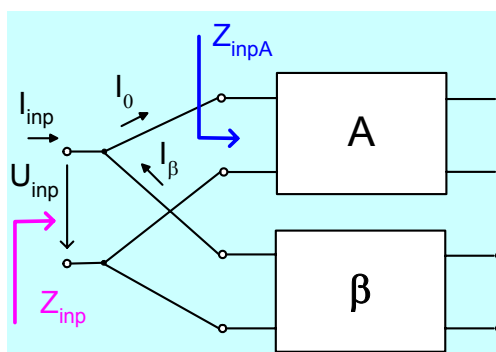
$$Z_{vst} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_0 - U_\beta}{I_1} = \frac{U_0}{I_1} \left(1 - \frac{U_\beta}{U_0} \right) = Z_{vst}^A \left(1 - \frac{U_\beta}{X_2} \frac{X_2}{U_0} \right) = Z_{vst}^A (1 - \beta A) \quad (11.49)$$

Pro vstupní impedanci resp. admitanci při **paralelní ZV** (**Obr. 88b**) lze odvodit obdobně

$$Z_{vst} = \frac{Z_{vst}^A}{(1 - \beta A)}, \quad Y_{vst} = Y_{vst}^A (1 - \beta A) \quad (11.50)$$



a)



b)

Obr. 88: Vstupní impedance soustavy se zpětnou vazbou
 a) při sériovém zapojení ZV, b) při paralelním zapojení ZV.

Výstupní impedance soustavy se zpětnou vazbou je podobně určena zapojením výstupních bran dvojbranů A a B (Tab. 7). Na propojení jejich vstupů nezáleží. Pro proudovou ZV lze odvodit následující vztah

$$Z_{vyst} = Z_{vyst}^A (1 - \beta A) \quad (11.51)$$

pro napětovou ZV platí pak duálně

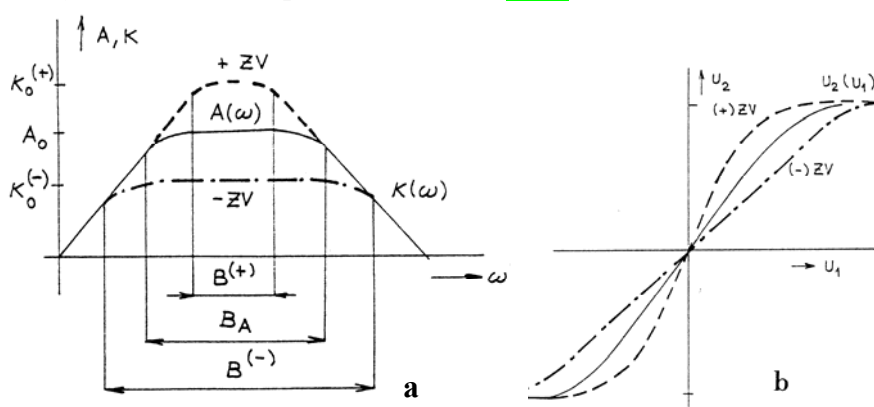
$$Z_{vyst} = \frac{Z_{vyst}^A}{(1 - \beta A)}, \quad Y_{vyst} = Y_{vyst}^A (1 - \beta A). \quad (11.52)$$

Zpětná vazba má podstatný vliv i na kmitočtové charakteristiky soustavy. Na Obr. 89a je znázorněn vliv ZV na modulovou charakteristiku $K(\omega)$. Vidíme, že záporná ZV snižuje zesílení, přenos $K^{(-)} < K$, ale rozšiřuje šířku pásma $B^{(-)} > B$. Při kladné ZV je tomu naopak. Přibližně platí vztah

$$A_0 B_A = K_0^{(+)} B_K^{(+)} = K_0^{(-)} B_K^{(-)}. \quad (11.53)$$

Z Obr. 89b je patrný vliv ZV na dynamiku soustavy a nelineární zkreslení. Záporná (kladná) ZV zvětšuje (zmenšuje) lineární část pracovní charakteristiky $u_2 = f(u_1)$.

Záporná zpětná vazba výrazně ovlivňuje i stabilitu hodnoty celkového zesílení K , snižuje vliv aktivního prvku (závislosti $A(\omega)$) na hodnotu i závislost $K(\omega)$.



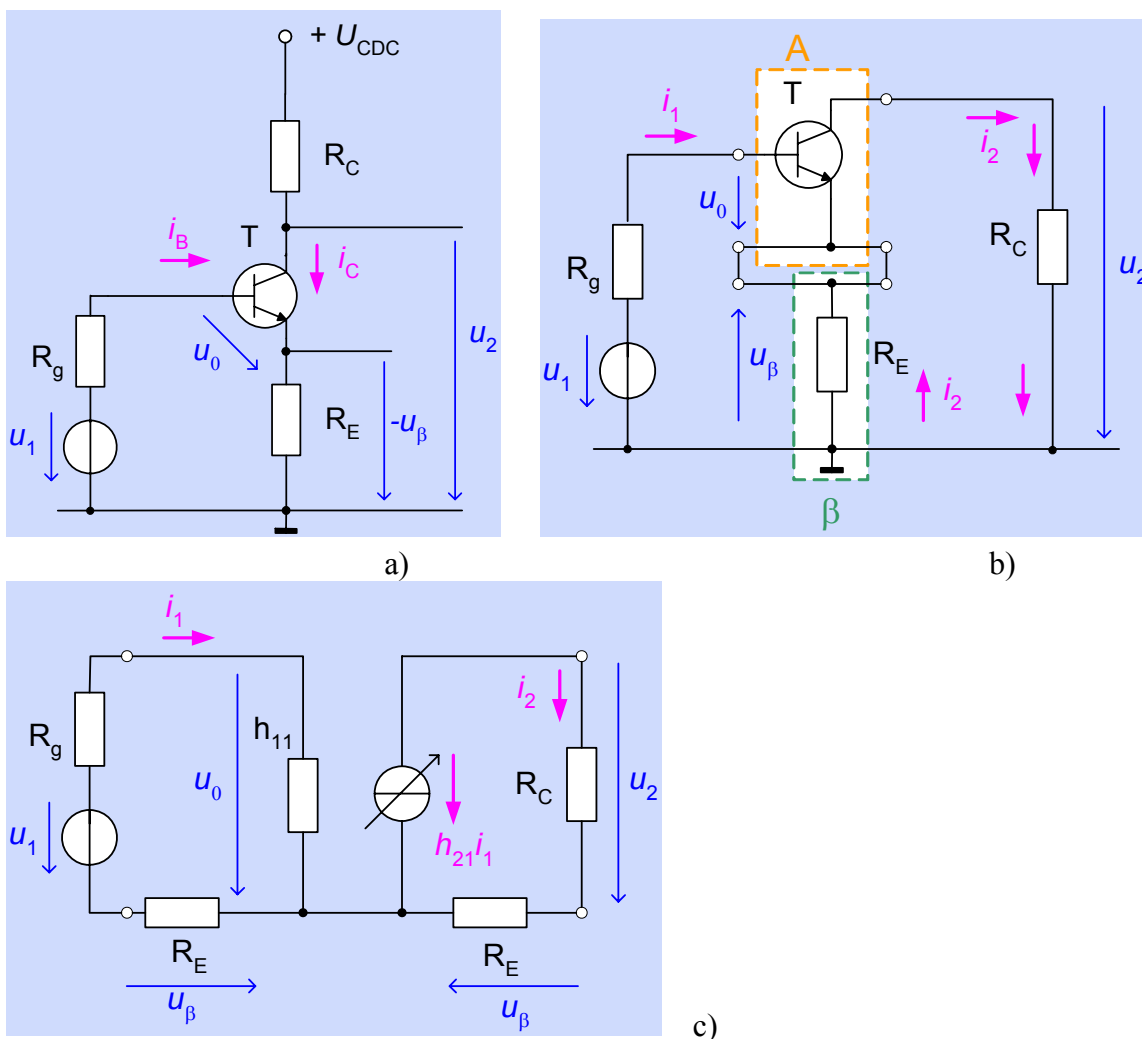
Obr. 89: Vliv zpětné vazby na charakteristiky obvodu.
 a) modulovou charakteristiku, b) pracovní charakteristiku vstup-výstup.

11.6.5 Zapojení zpětné vazby v zesilovačích

Z předchozí kapitoly se dá učinit stručný závěr, že záporná ZV má pozitivní vliv na vlastnosti zesilovače. Proto ji najdeme v každém praktickém zapojení a často nejen jednu. Rozlišujeme ZV:

- **dle umístění:**
 - zpětnou vazbu **lokální** (místní) - v jednom stupni,
 - zpětnou vazbu **globální** (celkovou) - přes více stupňů,
- **dle vlivu:**
 - zpětnou vazbu **signálovou** - základní ZV,
 - zpětnou vazbu **driftovou** - doplňková ZV pouze pro pomalé změny (teplota, stárnutí).

Posledně jmenovaná lokální **driftová** záporná zpětná vazba slouží ke stabilizaci pracovního bodu aktivního prvku, k otláčení vlivu jeho stárnutí a hlavně vlivu změny teploty.



Obr. 90: Tranzistorový zesilovač se zpětnou vazbou.

a) Zjednodušené schéma, b) náhradní schéma se ZV, c) náhradní schéma bez ZV.

Příklad 11.5: Tranzistorový zesilovač se zpětnou vazbou.

Na **Obr. 90a** je tranzistorový zesilovač se zpětnou vazbou. Definiujte zpětnou vazbu a odvoďte parametry této soustavy.

Řešení:

Jde o **lokální** zápornou zpětnou vazbu. Při vzrůstu proudu i_E vzroste úbytek napětí na R_E a ten odbuzuje vstupní bránu tranzistoru (je fázově otočen vůči vstupnímu napětí). Vazba je to **proudová**, R_E slouží jako převodník $I \rightarrow U$.

Vstupní obvody původního zesilovače a zpětnovazebního degenerovaného dvojbranu, tvořeného pouze R_E jsou zapojeny do série. Jde tedy o vazbu proudově **sériovou**, což lépe pochopíme z náhradního obvodu na **Obr. 90b**, účelově nakresleného v této podobě.

Zpětnovazební napětí u_β vzniká jako úbytek $u_\beta = -i_E R_E = i_2 R_E$. Výstupní napětí je $u_2 = -i_C R_C = i_2 R_C$, takže činitel zpětné vazby pro napětí se dá jednoduše odvodit dle vztahu

$$\tilde{\beta}_U = \frac{U_\beta}{U_2} = \frac{I_2 R_E}{I_2 R_C} = \frac{R_E}{R_C} \quad (11.54)$$

V tomto případě, kdy se jedná o proudově sériovou ZV, nás však bude více zajímat činitel zpětné vazby, definovaný dle **Tab. 7** následujícím vztahem

$$\beta = \frac{U_\beta}{I_2} = \frac{I_2 R_E}{I_2} = R_E \quad (11.55)$$

K určení parametru A původního dvojbranu (zesilovače bez ZV) si nakreslíme náhradní schéma na **Obr. 90c**. V **Obr. 90b** odstraníme ZV, při čemž poměry ve vstupní i výstupní části obvodu musí zůstat zachovány. Při kreslení vstupní části rozpojíme výstupní smyčku (uvažujeme $I_2 = 0$) a obdobně provedeme pro výstupní část. Z **Obr. 90c** určíme podle **Tab. 7** původní přenosovou vodivost

$$A = G_T = \frac{I_2}{U_0} = \frac{-h_{21} I_1}{I_1 (R_i + R_E + h_{11})} = \frac{-h_{21}}{R_i + R_E + h_{11}} \quad (11.56)$$

Vratný rozdíl pak je

$$N = 1 - \beta A = 1 + \frac{h_{21} R_E}{R_i + R_E + h_{11}} \quad (11.57)$$

Přenosová vodivost celé soustavy pak je

$$K = \hat{G}_T = \frac{I_2}{U_1} = \frac{A}{1 - \beta A} = \frac{-h_{21}}{R_i + h_{11} + R_E (1 + h_{21})} \approx -\frac{1}{R_E} \quad (11.58)$$

11.7 Kontrolní otázky z kapitoly 11

- 1) Co je to charakteristická rovnice obvodu a jak ji získáme?
- 2) Pojednejte o stabilitě obvodu. Uveďte základní kritéria stability.
- 3) Vysvětlete Nyquistovo kritérium stability. Co jsou to záloha zisku a záloha fáze?
- 4) Vysvětlete Bodeho kritérium stability.
- 5) Co jsou to oscilační podmínky a jak je získáme z popisu obvodu?
- 6) Nakreslete blokové schéma a napište základní vztahy pro zpětnou vazbu sériovou – napětíovou. Uveďte konkrétní příklad (schéma obvodu) této zpětné vazby.
- 7) Nakreslete blokové schéma a napište základní vztahy pro zpětnou vazbu sériovou – proudovou. Uveďte konkrétní příklad (schéma obvodu) této zpětné vazby.
- 8) Nakreslete blokové schéma a napište základní vztahy pro zpětnou vazbu paralelní – proudovou. Uveďte konkrétní příklad (schéma obvodu) této zpětné vazby.
- 9) Nakreslete blokové schéma a napište základní vztahy pro zpětnou vazbu paralelní – napětíovou. Uveďte konkrétní příklad (schéma obvodu) této zpětné vazby.
- 10) Vysvětlete jak zpětná vazba ovlivní vstupní impedanci.
- 11) Vysvětlete jak zpětná vazba ovlivní výstupní impedanci.
- 12) Odvoďte vztah pro vstupní impedanci při sériové zpětné vazbě.
- 13) Odvoďte vztah pro vstupní impedanci při paralelní zpětné vazbě.
- 14) Rozeberte vliv zpětné vazby na kmitočtové charakteristiky a šířku přenášeného pásma.
- 15) Rozeberte vliv zpětné vazby na pracovní charakteristiku (vstup - výstup), dynamiku a nelineární zkreslení obvodu.

12 Metody řešení nelineárních obvodů

Cíle kapitoly: Seznámit studenty s principy a základy metod, které se používají pro řešení nelineárních obvodů, se způsoby a možnostmi zjednodušování této úlohy. Naučit a na řadě příkladů procvičit grafické metody. Vysvětlit princip linearizace. Ukázat nejpoužívanější analytické metody, hlavně metodu stavových proměnných. Seznámit se základními numerickými metodami, využívanými v obvodových simulátorech na počítači. Naučit je různým způsobům určování spekter signálů v nelineárních obvodech.

12.1 Obecně o analýze nelineárních obvodů

Veškeré reálné elektronické obvody jsou v podstatě nelineární obvody (NEO). Jen když zpracovávané signály jsou malé (a to je dosti často), můžeme je považovat za lineární resp. linearizované (LEO) a k jejich řešení použít metody rozebírané v kap. 6 až 8. V některých případech (zpracování větších signálů) to však nelze a pak je třeba použít při jejich analýze zvláštních metod, uváděných v této kapitole.

V NEO **neplatí princip superpozice**, který je při řešení LEO s výhodou používán. V NEO může existovat i několik ustálených stavů, při čemž který ze stavů nastane záleží na počátečních podmínkách a průběhu přechodného děje. Daný ustálený stav dává možnost usoudit o stavu obvodu v minulosti, tedy v NEO existuje paměť a hystereze. Tyto obvody se v praxi hojně využívají proto, že v NEO dochází ku změně spektra zpracovávaných signálů, k přesunu energie ve spektru. Na výstupu NEO jsou jiné složky než na vstupu.

Pro řešení NEO není k dispozici žádná univerzální metoda. Popis obvodu je totiž závislý na charakteristikách jednotlivých nelineárních prvků. Za účelem poskytnutí základních informací o dějích v NEO se často používají **přibližné metody**, které jsou výpočtově méně náročné.

Podrobná analýza je složitá a mnohostranná záležitost, zpravidla probíhá v několika etapách:

- 1) Seznámení se s funkcí obvodu z kvalitativního hlediska pomocí některé z přibližných metod (velmi často metodou grafickou).
- 2) Analýza NEO k získání nejdůležitějších obvodových veličin, nutných k popisu vyšetřovaného jevu. Pro vyšetření různých veličin se zpravidla používá různých metod.
- 3) Simulace a modelování NEO na počítači (PSPice) k dokonalému ověření závěrů předchozích etap.
- 4) Případné experimentální měření daného NEO.

Používané metody dělíme do těchto skupin:

- grafické metody,
- graficko-početní metody,
- analytické metody,
- numerické metody.

12.2 Nelineární dvojpóly a dvojbrany

Parametry **lineárních** prvků jsou konstantní, nezávisí na žádné obvodové ani vnější veličině. Jejich obvodové veličiny (x, y) jsou vázány obecným vztahem (12.1), kde k je parametr. Charakteristiky, které tuto závislost graficky vyjadřují jsou tedy lineární. U

nelineárních prvků charakteristiky představují funkční závislost (12.1). Jejich parametry závisejí na **pracovním bodě**, tj. na klidových hodnotách obvodových veličin $Q(X_0, Y_0)$

$$y = k \cdot x, \quad (12.1a) \quad y = f(x). \quad (12.1b) \quad (12.1)$$

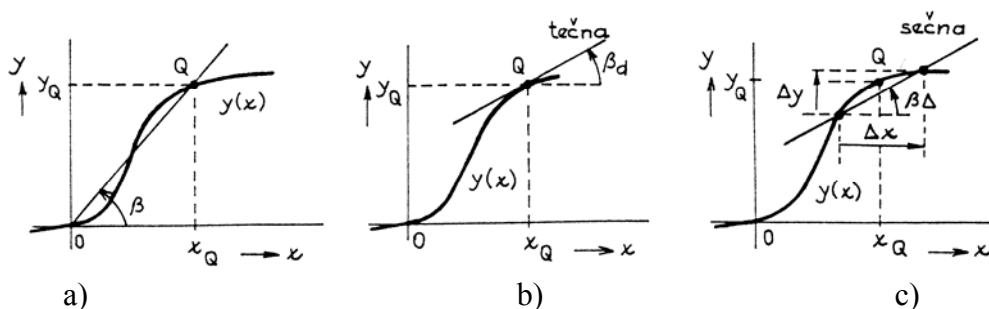
Parametry **řízených lineárních** prvků závisejí na řídicí veličině z . Jejich charakteristiky představují soustavu přímek, odpovídající vztahu (12.2). Každé konkrétní hodnotě $z = z_i$ odpovídá jedna přímka. U **řízených nelineárních** prvků jsou charakteristiky obecně dány vztahem (12.2). V technické praxi je řídicí veličina obvykle funkcí času $z = z(t)$ a takové prvky nazýváme s časově proměnnými parametry

$$y = k(z)x, \quad (12.2a) \quad y = f(x, z). \quad (12.2b) \quad (12.2)$$

Vlastnosti nelineárního prvku pak popisujeme ne jedním, ale několika, různě definovanými parametry. **Statický parametr** P je definován jako poměr klidových hodnot obvodových veličin, Y_0 v daném pracovním bodě, závislé veličiny (Y_0) k nezávislé (X_0)

$$P = \frac{y}{x} \bigg|_Q = \frac{Y_0}{X_0}. \quad (12.3)$$

Statický parametr lze modelovat ekvivalentním lineárním dvojpólem, který na stejnosměrnou budící veličinu X_0 má stejnou odezvu Y_0 jako prvek nelineární. Jeho charakteristikou je přímka na **Obr. 91a**, procházející počátkem a pracovním bodem Q .



Obr. 91: Parametry nelineárního dvojpólu.

a) statický parametr, b) diferenciální parametr, c) diferenční parametr.

Diferenciální parametr P_d definujeme jako poměr (12.4) diferenciálů obvodových veličin dx, dy v daném pracovním bodě Q . Jde tedy o derivaci charakteristiky v bodě Q . Jeho geometrickou interpretací je tečna (**Obr. 91b**). Zavedeme-li místo nekonečně malých přírůstků (12.4) konečné přírůstky $\Delta y, \Delta x$ můžeme dle (12.4) definovat **diferenční parametr** P_Δ , jehož geometrickou interpretací je sečna (**Obr. 91c**)

$$P_d = \frac{dy}{dx} \bigg|_Q, \quad (12.4a) \quad P_\Delta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \bigg|_Q. \quad (12.4b) \quad (12.4)$$

Uvedené parametry P, P_d, P_Δ jsme chápali jako konkrétní hodnoty v daném pracovním bodě Q . Můžeme je však také interpretovat jako funkce $P(x), P_d(x), P_\Delta(x)$ (12.5) nezávisle proměnné obvodové veličiny x a pak s výhodou využít jejich grafické vyjádření

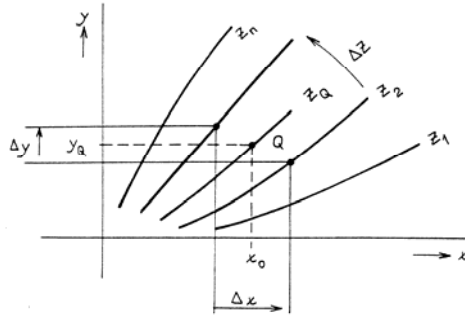
$$P(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad (12.5a) \quad P_d(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (12.5b) \quad (12.5)$$

Dynamické parametry P_d, P_Δ používáme k popisu chování nelineárního prvku vzhledem k malým signálům, superponovaným na stejnosměrné složky X_0, Y_0 , určující klidový stav.

U **řízených nelineárních dvojpólů** (**Obr. 92**) charakterizovaných závislostí (12.2b) definujeme **statický parametr** $P(x, z)$ (12.3), při konstantní řídicí veličině $z = Z_0$. Stejně tak i základní (výstupní) diferenciální parametr $P_d(x, z)$. Nově i **přenosový** diferenciální parametr

$$K_d(x, z) = \left. \frac{dy}{dz} \right|_{x=X_0} = \left. \frac{df(x, z)}{dx} \right|_{x=X_0} \quad (12.6)$$

V [1] je definován obdobně další přenosový diferenciální parametr $A_d(x, z)$. Nahradíme-li v definičních vztazích diferenciály konečnými přírůstky (diferencemi), můžeme definovat odpovídající **diferenční parametry** $P_\Delta(x, z)$, $K_\Delta(x, z)$, resp. $A_\Delta(x, z)$ [1].



Obr. 92: Určování parametrů řízeného nelineárního dvojpólu.

Takto lze definovat nejen parametry nelineárních R , ale i nelineárních L a C . Vše lze rozšířit na nelineární dvojbrany i vícebrany [1]. S mnoha dalšími podrobnostmi se můžete blíže seznámit v učebnici [4] (vydána byla i v české verzi).

12.3 Linearizace

Jsou-li amplitudy signálů působících na nelineární prvek dostatečně malé, lze použít metodu **linearizace**, tj. náhrady nelineárního prvku ekvivalentním modelem obsahujícím lineární prvky a řízené zdroje. **Náhradní obvod** pak vyšetřujeme pouze z hlediska odezvy na malý budicí signál, metodami pro lineární obvody, čímž se řešení obvodu výrazně zjednoduší.

12.3.1 Linearizace neřízeného nelineárního rezistoru

Uvažujme nejjednodušší případ **neřízeného** nelineárního rezistoru R_N (**Obr. 93**), napájeného ze zdroje stejnosměrného napětí U_0 na které jsou superponovány malé napěťové změny Δu , takže celkové napětí na nelineárním rezistoru je $u = U_0 + \Delta u$ (**Obr. 93a**). Jeho A-V charakteristiku $i = f(u)$ lze v okolí klidového pracovního bodu Q (**Obr. 93b**) vyjádřit pomocí Taylorovy řady

$$i = f(u) = f(U_0) + \left(\frac{di}{du} \right)_{u=U_0} \Delta u + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 i}{du^2} \right)_{u=U_0} (\Delta u)^2 + \dots, \quad (12.7)$$

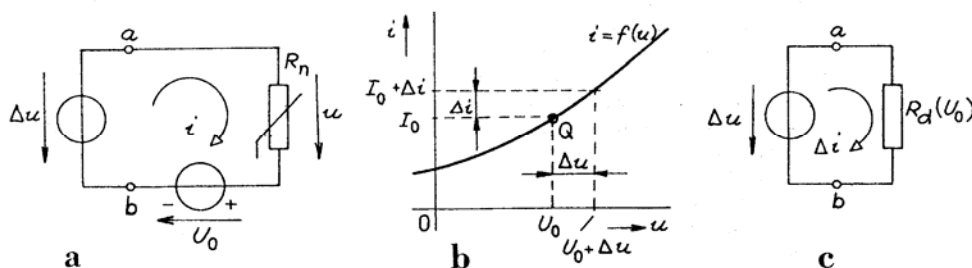
v níž je pro malé změny Δu možné zanedbat členy vyšších řádů (počínaje kvadratickými), takže potom platí

$$i = I_0 + \Delta i \doteq I_0 + \left(\frac{di}{du} \right)_{u=U_0} \Delta u = I_0 + G_d(U_0) \Delta u. \quad (12.8)$$

kde $I_0 = f(U_0)$ je klidový proud v pracovním bodě $u = U_0$. Vodivost $G_d(U_0)$ je pak **dynamická** (diferenciální) vodivost daná sklonem A-V charakteristiky v tomto bodě. Ze vztahu (12.8) je zřejmé, že mezi malým přírůstkem napětí Δu a odpovídajícím přírůstkem proudu Δi platí přibližně lineární závislost

$$\Delta i \doteq G_d(U_0) \Delta u = \frac{1}{R_d(U_0)} \Delta u . \quad (12.9)$$

která určuje vlastnosti ekvivalentního lineárního obvodu pro malé změny napětí a proudu, obsahujícího lineární rezistor s odporem R_d (Obr. 93c), jehož hodnota závisí na stejnosměrném předpětí U_0 . Zcela analogický postup lze použít i pro neřízený nelineární induktor a kapacitor [4].



Obr. 93: Princip linearizace nelineárního rezistoru.

12.3.2 Linearizace řízeného nelineárního rezistoru

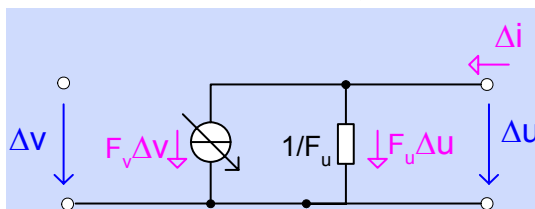
V případě **řízeného** nelineárního rezistoru závisí jeho proud i nejen na napětí u , ale také na hodnotě řídicího parametru v . Pro tento případ byl v okolí klidového pracovního bodu v [4] odvozen následující vztah (zjednodušený Taylorův rozvoj funkce dvou proměnných)

$$\begin{aligned} i = I_0 + \Delta i &\doteq f(U_0; V_0) + \left(\frac{d}{du} f \right)_{u=U_0, v=V_0} \Delta u + \left(\frac{d}{dv} f \right)_{u=U_0, v=V_0} \Delta v = \\ &= I_0 + F_u(U_0; V_0) \Delta u + F_v(U_0; V_0) \Delta v \end{aligned} \quad (12.10)$$

Takže pro malou změnu proudu platí přibližný vztah

$$\Delta i \doteq F_u(U_0; V_0) \Delta u + F_v(U_0; V_0) \Delta v \quad (12.11)$$

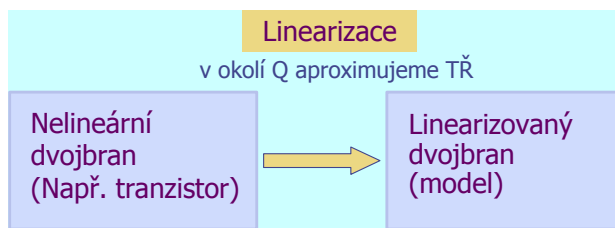
První člen představuje proud tekoucí lineárním rezistorem, jehož vodivost je $G = F_u(U_0, V_0)$. Druhá část pak proud závislý na změně řídicího parametru v . Odpovídající linearizovaný model (Obr. 94) tedy obsahuje paralelní kombinaci lineárního rezistoru s odporem $1/F_u$ a zdroje proudu závislého na řídicím parametru v . Je-li v napětí, parametrem zdroje je přenosová vodivost. K tomuto modelu můžeme sestojit model duální (Théveninův).



Obr. 94: Linearizovaný model řízeného nelineárního rezistoru.

12.3.3 Linearizace nelineárního dvojbranu

Princip linearizace lze zobecnit i na nelineární dvojbrany (např. BJT) dle [4] a získat tak lineární lokální obvodový model, který však platí pouze pro malé signály a jen v okolí daného pracovního bodu Q (pro jiný Q má model jiné hodnoty parametrů).



Obr. 95: Linearizace nelineárního dvojbranu

Uvažujme nelineární dvojbran popsany vodivostními charakteristikami

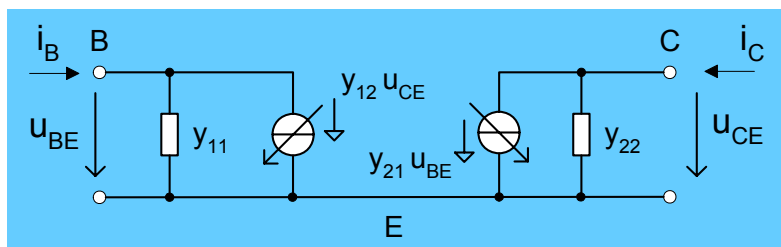
$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(u_1, u_2) \\ i_2 &= i_2(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Nelineární rovnice (12.12) lze obdobným způsobem nahradit následujícími rovnicemi lineárními (blíže viz. [4] a [1])

$$\begin{aligned} \Delta i_1 &= y_{11}\Delta u_1 + y_{12}\Delta u_2 \\ \Delta i_2 &= y_{21}\Delta u_1 + y_{22}\Delta u_2 \end{aligned} \quad (12.13)$$

Parametry y_{ij} uvažujeme většinou jako reálné, pro rychlé vf signály pak jako komplexní, čímž vhodně postihneme setrvačné vlastnosti dvojbranu. Hodnoty parametrů závisí nejen na typu tranzistoru, ale i na nastavení pracovního bodu. Často lze některé parametry zanedbat a model zjednodušit. Poznamenejme, že často v (12.13) nepíšeme symboly Δ , ale jejich platnost pouze pro změny obvodových veličin nadále předpokládáme.

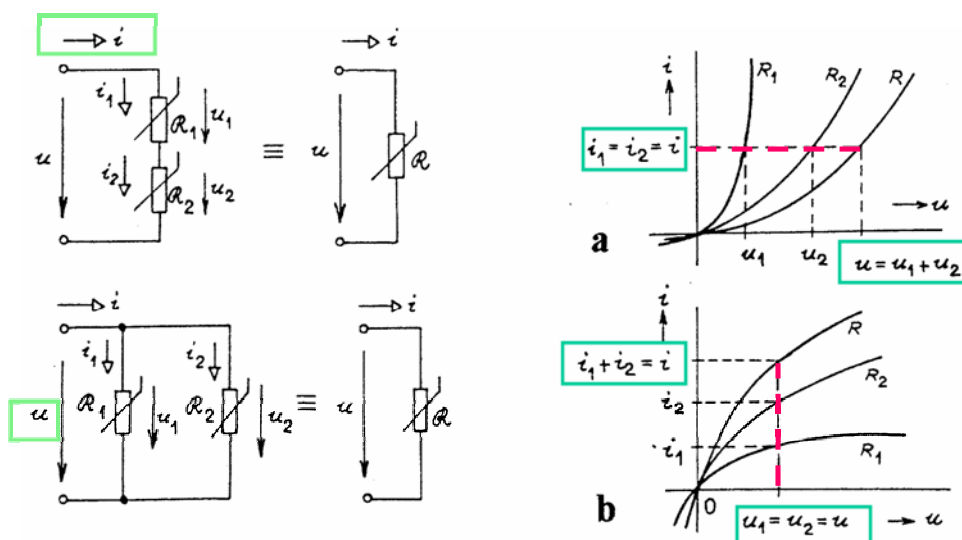
Nejpoužívanější lokální model bipolárního tranzistoru, pro oblast vyšších kmitočtů a pro zapojení se společným emitorem, je model s admitančními parametry na **Obr. 96**.



Obr. 96: Admitanční model bipolárního tranzistoru SE.

12.4 Grafické metody

Grafické řešení ve vhodně upravených charakteristikách nelineárních prvků bývá rychlé a snadné. Vyznačuje se také velkou názorností. Umožňuje odhalit typické zvláštnosti NEO. Dovoluje však řešit pouze daný konkrétní případ. Tyto metody (na rozdíl od analytických) neposkytnou obecná řešení a závěry. Z matematického hlediska jde o grafické řešení buď nelineárních algebraických rovnic nebo nelineárních diferenciálních rovnic. V této kapitole si na typických příkladech ukážeme grafické řešení **rezistivních obvodů** (nelineárních algebraických rovnic). V dalších kapitolách pak i grafické řešení setrvačných NEO, tedy nelineárních diferenciálních rovnic.



Obr. 97: Výsledná A-V charakteristika dvou nelineárních rezistorů.

Příklad 12.1 Výsledná A-V charakteristika dvou nelineárních rezistorů.

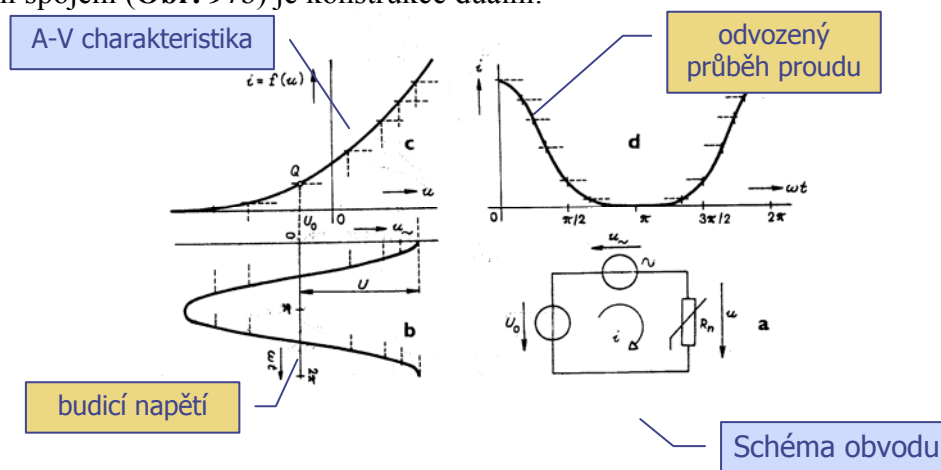
Sestrojte výslednou A-V charakteristiku $i = f(u)$, spojíme-li dva nelineární rezistory a) do série (**Obr. 97a**), b) paralelně (**Obr. 97b**), známe-li charakteristiky jednotlivých prvků $i_1 = f_1(u_1)$, $i_2 = f_2(u_2)$.

Řešení:

Grafickou konstrukci (**Obr. 97a**) provedeme na základě zřejmých vztahů (1. a 2. KZ)

$$i = i_1 = i_2, \quad (12.14) \quad u = u_1 + u_2 = f_1(i) + f_2(i). \quad (12.14)$$

Pro paralelní spojení (**Obr. 97b**) je konstrukce duální.



Obr. 98: Odvození průběhu proudu v NEO metodou tří rovin.

Příklad 12.2 Odvození průběhu proudu v NEO metodou tří rovin.

Na **Obr. 98a** je jednoduchý NEO. K nelineárnímu rezistoru R_n , se známou A-V charakteristikou (**Obr. 98c**), je připojen zdroj stejnosměrného napětí U_0 , který určuje polohu pracovního bodu Q a do série je připojen zdroj harmonického napětí (**Obr. 98b**). Vyřešit máme průběh proudu v tomto obvodu.

Řešení:

Časový průběh budicího napětí si přeskreslíme dle **Obr. 98b**, v poloze odpovídající A-V charakteristice. Perioda se rozdělí na vhodný počet intervalů. Průběh proudu se pak odvodí bod po bodu, převodem mezi třemi souřadnicovými rovinami (**Obr. 98b** → **Obr. 98c** →

Obr. 98d). Vzhledem k nelinearitě A-V charakteristiky vychází proud $i(t)$ neharmonický (došlo k deformaci jeho průběhu vůči budicímu napětí).

Příklad 12.3 Metoda zatěžovací přímky.

V obvodu na **Obr. 99** máme zjistit polohu pracovního bodu Q na charakteristice nelineárního rezistoru R_n , tj. určit hodnotu stejnosměrného proudu I_0 a hodnoty úbytků napětí na lineárním (U_R) a nelineárním (U) rezistoru.

Řešení:

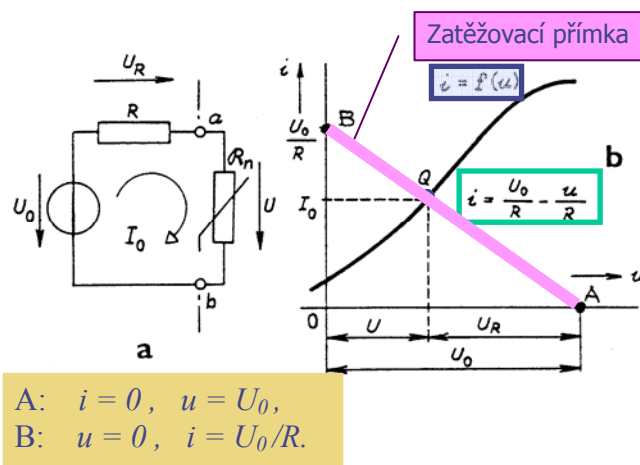
Při řešení obvod rozdělíme na dvě části (dělicí čára $a-b$). Nelineární část (R_n) je popsána A-V charakteristikou a lineární část (sériové spojení U_0 a R) graficky řešíme v této souřadnicové soustavě. Jde o přímku danou vztahem vyplývajícím s aplikace 2. KZ

$$i = -\frac{u}{R} + \frac{U_0}{R} \quad (12.15)$$

Zakreslíme pomocí dvou bodů (A, B) tak, jak je naznačeno na **Obr. 99**. Řešením je pak průsečík obou křivek (Q). Povšimněme si, že změna napájecího napětí se projeví posunem odporové přímky (rovnoběžka). Změna odporu R má pak za následek změnu sklonu odporové přímky.

Příklad 12.4 Sestrojení pracovní charakteristiky.

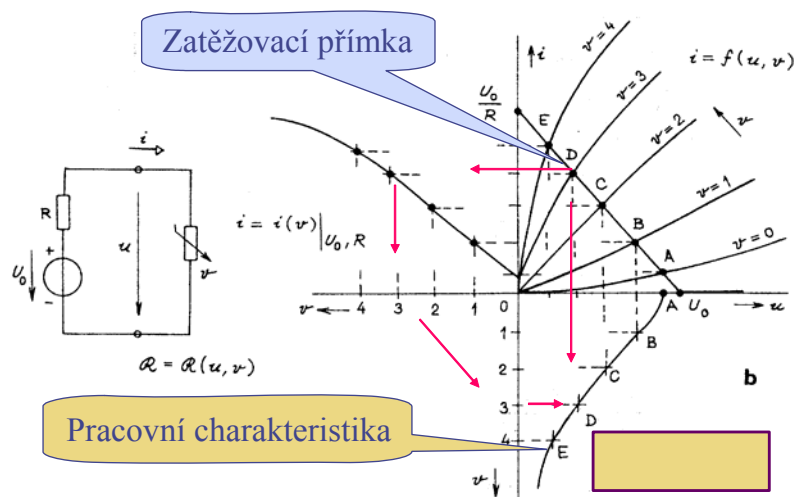
Na **Obr. 100a** je jednoduchý obvod s nelineárním řízeným rezistorem $\Re = \Re(u, v)$, kde řídicí veličinou je v . V sérii s $\Re$ je lineárním zatěžovacím rezistorem R . Obvod napájený ze stejnosměrného zdroje U_0 . Ukolem je graficky odvodit **pracovní charakteristiku** (charakteristiku vstup - výstup). Je to jedna z nejčastějších praktických úloh (např. řešení tranzistorového zesilovače). Tato charakteristika dává dokonalý přehled o možnostech využití daného obvodu.



Obr. 99: Metoda zatěžovací přímky.

Řešení:

V síti charakteristik $\Re: i = f(u, v)$, zakreslíme nejprve zatěžovací přímku popisující lineární část obvodu (R, U_0) a zobrazující rovnici (12.15). Průsečíky zatěžovací přímky se sítí A-V charakteristik $\Re$ (body A až E) převedeme do druhého a čtvrtého kvadrantu, kde získáme hledanou pracovní charakteristiku (Obr. 100).



Obr. 100: Sestrojení pracovní charakteristiky obvodu s řízeným nelineárním rezistorem.

12.5 Analytické metody

Analytické metody umožňují získat řešení v obecném univerzálním tvaru, pro libovolnou (v určitých mezích) kombinaci parametrů i počátečních podmínek. Když je známý obecný analytický výraz můžeme do něj dosadit konkrétní hodnoty parametrů. Pro tyto metody potřebujeme popis nelineárních charakteristik vhodnými analytickými výrazy $y = f(x)$. Jako první krok tedy provádíme aproximaci charakteristik (kap. 4.2). Musíme také znát analytický zápis budicího signálu $x(t)$, aby bylo možné řešit časový průběh odezvy $y(t)$. V případě potřeby provádíme harmonickou analýzu výstupního signálu $y(t)$ (určujeme jeho spektrum).

Setrvačný nelineární obvod je obecně popsán soustavou nelineárních diferenciálních rovnic v implicitním tvaru

$$\vec{F}(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \dots, \frac{d^n\vec{x}}{dt^n}) = 0. \quad (12.16)$$

V případě buzených obvodů bude tato rovnice nehomogenní. U autonomních obvodů nebude čas nezávisle proměnnou. Řešení nelineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů (vyšších derivací) je obtížné, proto se snažíme na úkor přesnosti vyšší derivace zanedbat a řešení zjednodušovat.

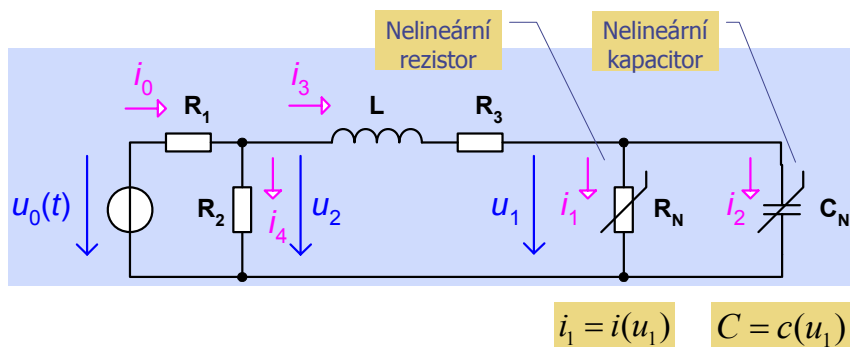
12.5.1 Principy zjednodušování řešení

Z teoretické elektrotechniky [7], [8] známe některé využitelné principy. Mezi ně například patří princip **kompenzace**, princip **rozštěpování uzlů**, princip **rozpojování zkratů** a hlavně pak **Théveninův a Nortonův** teorém (kap. 2.2). K základním způsobům zjednodušování patří i **diakoptický princip rozkladu** složitěho obvodu [1], jeho řešení po částech, daleko jednodušších podobodů zvláště a pak jejich spojování a řešení vzájemné interakce.

Na základě principu **idealizace** překreslíme obvodové (zapojovací) schéma na **výpočtové schéma**. Zanedbáme některé méně významné jevy, použijeme idealizované modely prvků, potřebné úrovně (kap. 4). Na druhé straně zahrneme do výpočtového schématu i modely parazitních jevů (kapacity spojů atd.).

Je-li to možné použijeme **princip linearizace** (kap. 12.3), neboť lineární diferenciální rovnice řešíme daleko snadněji než nelineární. Jak jsme ukázali v kap. 12.3, o použití tohoto principu rozhoduje velikost signálu. Připomeňme, že pojem malý-velký signál je ale velmi relativní. Stejný signál přivedený do různého pracovního bodu stejné charakteristiky může být považován někdy za malý jindy za velký signál (podle toho dochází-li k jeho zkreslení).

Počet nezávislých akumulacních prvků určuje řád diferenciální rovnice popisující obvod a tím složitost výpočtu. Je proto snaha tyto prvky co nejvíce eliminovat. **Princip úplné eliminace akumulacních prvků** je možný při relativně pomalých změnách všech obvodových veličin (oblast nf), kdy možno uvažovat, že jejich derivace budou nulové. Pak nelineární diferenciální rovnice (12.6) přechází na nelineární rovnice algebraické. V obvodě induktoři L nahradíme zkratem a kapacitory C rozpojením větve a získáme tak **statický rezistivní model** obvodu.



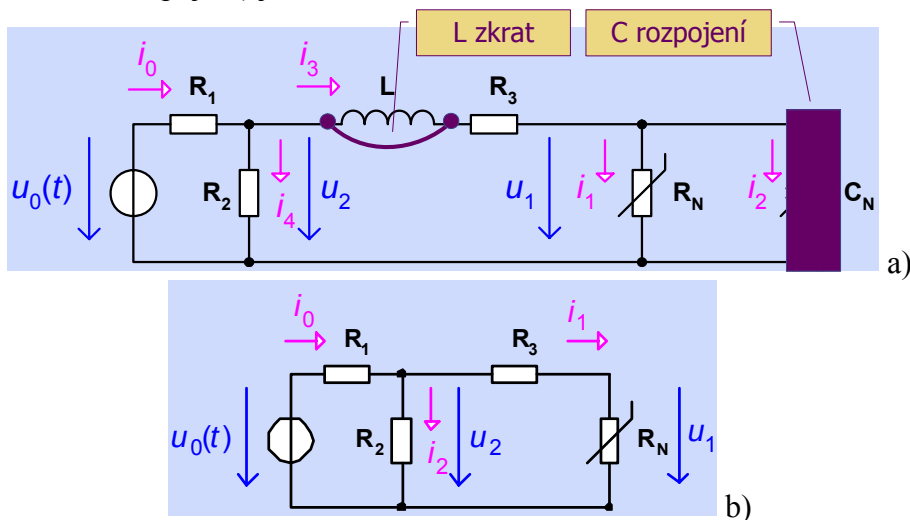
Obr. 101: Nelineární setrvačný obvod.

Příklad 12.5 Statický model nelineárního setrvačného obvodu

Na **Obr. 101** je nelineární setrvačný obvod, v němž nelineární rezistor R_N je dán A-V charakteristikou $i_1 = i(u_1)$ a nelineární kapacitor C_N s C-V charakteristikou $C = c(u_1)$. Další prvky (R_1, R_2, R_3, L) jsou lineární. Obvod je napájen ze zdroje neharmonického napětí $u_0(t)$. Hledáme časový průběh obvodových veličin $u_1(t), u_2(t), i_3(t)$, k tomu sestrojte statický model. Analyticky odvoďte platnost tohoto modelu.

Řešení:

Odvození statického modelu, použitím uvedeného principu eliminace akumulacních prvků (L - zkrat, C - rozpojení) je na **Obr. 102**.



Obr. 102: Statický model nelineárního setrvačného obvodu.

Zjednodušení popisu umožňuje také princip náhrady nelineárních akumulacních prvků **modelem s lineárním akumulacním prvkem**. Nelineární kapacitor tak nahradíme paralelní kombinací lineárního kapacitoru a řízeného nelineárního rezistoru [4].

Jednoduše lze také akumulacní prvky eliminovat, když mají **extrémní hodnoty** parametrů. Při $C \rightarrow 0$ lze kapacitor nahradit rozpojením. Duálně při $L \rightarrow 0$ induktor nahradíme zkratem. Pro opačný extrém $C \rightarrow \infty$ kapacitor modelujeme zdrojem napětí a pro signálové změny zkratem. Duálně při $L \rightarrow \infty$ induktor nahradíme zdrojem proudu a pro signálové změny rozpojením.

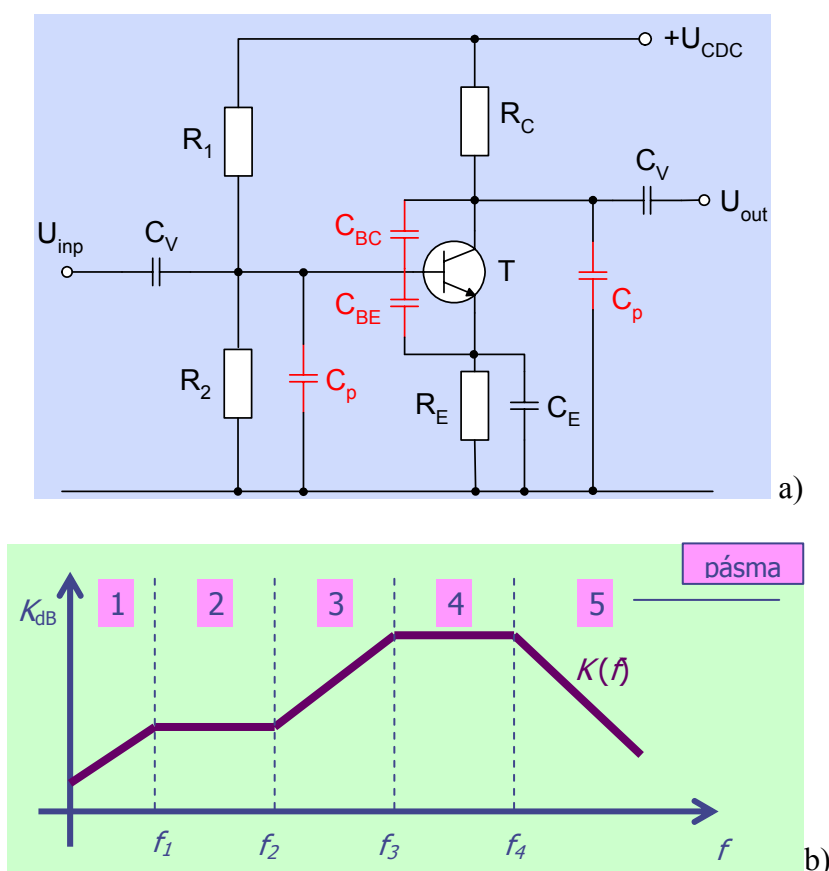
Významné zjednodušení nám umožní také princip **rozkladu řešení na kmitočtové pásma**. Pro každé pásmo pak řešíme obvod zvlášť, pomocí odpovídajících zjednodušených modelů. Nejčastější rozdělení je na tři pásma - oblast nízkých, středních a vysokých kmitočtů.

Příklad 12.6 Rozklad řešení tranzistorového zesilovače na kmitočtové pásma.

Na **Obr. 103a** je schéma tranzistorového zesilovače v zapojení **SE**, doplněné o parazitní kapacity. Modulová charakteristika jeho napěťového přenosu má aproximovaný průběh dle **Obr. 103b**. Její tvar nabízí, že řešení si můžeme rozložit na pět kmitočtových pásem. Nakreslete úplný výpočtový model a zjednodušené modely pro jednotlivá pásma.

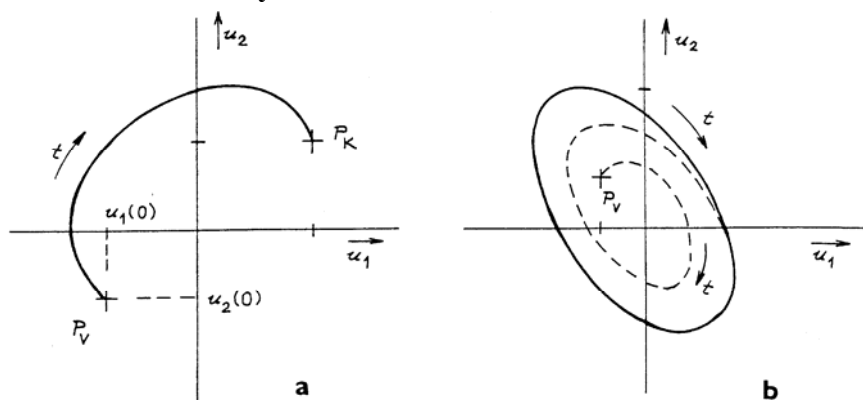
12.5.2 Stavby a děje v nelineárních obvodech

Úkolem analýzy je zkoumat a popisovat děje probíhající v obvodě. Jaké průběhy mají obvodové veličiny a jaké podmínky musí být splněny, aby k požadovaným dějům došlo. **Stavem** NEO rozumíme souhrn hodnot obvodových veličin v určitém časovém okamžiku. V prostoru stavových veličin je obrazem stavu **pracovní bod**.



Obr. 103: Tranzistorový zesilovač SE (a) a jeho modulová charakteristika (b).

Děj představuje posloupnost stavů, které za sebou následují v čase. Jeho obrazem je **stavová trajektorie**. U přechodného děje stavová trajektorie (Obr. 104a) vychází z **výchozího pracovního bodu** (P_V) a končí v **klidovém pracovním bodě** (P_K). U periodicky ustáleného děje, kdy stavy v obvodě se periodicky opakují, je stavová trajektorie (Obr. 104b) uzavřená, hovoříme o **mezním cyklu**.



Obr. 104: Stavová trajektorie.

Začínáme-li s řešením neznámého obvodu je vhodné nejprve vyšetřit tyto dva krajní stavy (P_K, P_V). Dostaneme důležitou informaci o chování obvodu, kterou (bude-li to potřebné) doplníme o složitější výpočet trajektorie přechodného děje. Při **vyšetřování výchozího stavu** (P_V) nahradíme akumulční prvky (L a C) zdroji, simulujícími počáteční podmínky $U_C(0)$ a $I_L(0)$. Model bude čistě rezistivní, popsáný jednoduššími algebraickými rovnicemi. Při **vyšetřování klidového stavu** (P_K), předpokládáme konstantní obvodové veličiny. V rovnicích popisujících obvod (12.16), pak jejich nulové derivace a tak z diferenciálních rovnic dostaneme opět rovnice algebraické. V obvodovém modelu nahradíme kapacitor rozpojením a induktor zkratem.

12.5.3 Metoda stavových proměnných

V tomto případě popisujeme obvod soustavou N diferenciálních rovnic prvního řádu (místo jedné N -tého). **Hlavní stavové rovnice** (12.17a) vyjadřují vztahy mezi stavovými veličinami (vektorem stavových veličin $\vec{s}$), jejich derivacemi (stavovou rychlostí) a budícími veličinami (vektorem $\vec{y}$).

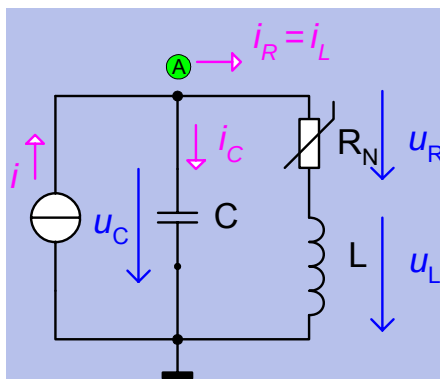
$$\dot{\vec{s}} = \mathbf{A}\vec{s} + \mathbf{B}\vec{y}, \quad (12.17a) \quad \vec{s}(0) = \vec{s}_0. \quad (12.17b) \quad (12.17)$$

Stavové veličiny $\vec{s}$ jsou vhodně vybírány z obvodových veličin ($\vec{x}$), a to proudy induktorů a napětí kapacitorů, protože tyto určují přímo energetický stav obvodu s lineárními setrvačnými prvky. U obvodů s nelineárními setrvačnými prvky volíme pak magnetické toky induktorů a náboje kapacitorů. Zbylé obvodové veličiny ($\vec{z}$) určíme z **vedlejších stavových rovnic** (12.17b). V autonómním obvodě neuvažujeme vnější buzení ($\vec{y} = 0$). Ve stavových rovnicích nebude explicitně figurovat čas (t), obsahuje-li obvod pouze časově nezávislé prvky. Stavové rovnice pak budou v **rekurentním tvaru**

$$\vec{s}(k+1) = \mathbf{A}\vec{s}(k) + \mathbf{B}\vec{y}(k), \quad (12.18a) \quad \vec{s}(0) = \vec{s}_0. \quad (12.18b) \quad (12.18)$$

Příklad 12.7 Nelineární RLC obvod.

Sestavení stavových rovnic ukážeme pro jednoduchý nelineární obvod RLC druhého řádu na **Obr. 105**. Nelineární rezistor R_N je dán A-V charakteristikou $u_R = a i_R^2$.

**Obr. 105:** Nelineární RLC obvod.

Řešení:

Prvkové rovnice akumulčních akumulčních dvojpólů L (12.19) a C (12.19)

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad (12.19a) \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad (12.19b) \quad (12.19)$$

dosadíme do Kirchhoffových rovnic (1. KZ pro uzel **A**, 2. KZ pro danou smyčku) a po úpravě dostáváme hledané stavové rovnice

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}(u_C - a i_L^2), \quad (12.20a) \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}(i - i_L). \quad (12.20b) \quad (12.20)$$

U **lineárních** časově invariantních **obvodů** lze stavové rovnice psát v algebraickém (maticovém) tvaru

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{B} \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{s} + \mathbf{D} \mathbf{y}. \quad (12.21)$$

V literatuře [10] najdeme systematické postupy tvoření hlavní stavové rovnice, založené na topologickém přístupu. Topologický graf (kap. 5) rozdělíme na **pravý strom** (složený pouze z haluzí $\bar{C}$, $\bar{R}$ a zdrojů $\bar{U}$) a **korunu** (složený pouze z haluzí $\bar{L}$, $\bar{G}$ a zdrojů $\bar{I}$). Je-li v obvodě kapacitní smyčka nebo induktivní řez, musíme použít zvláštní postupy [10].

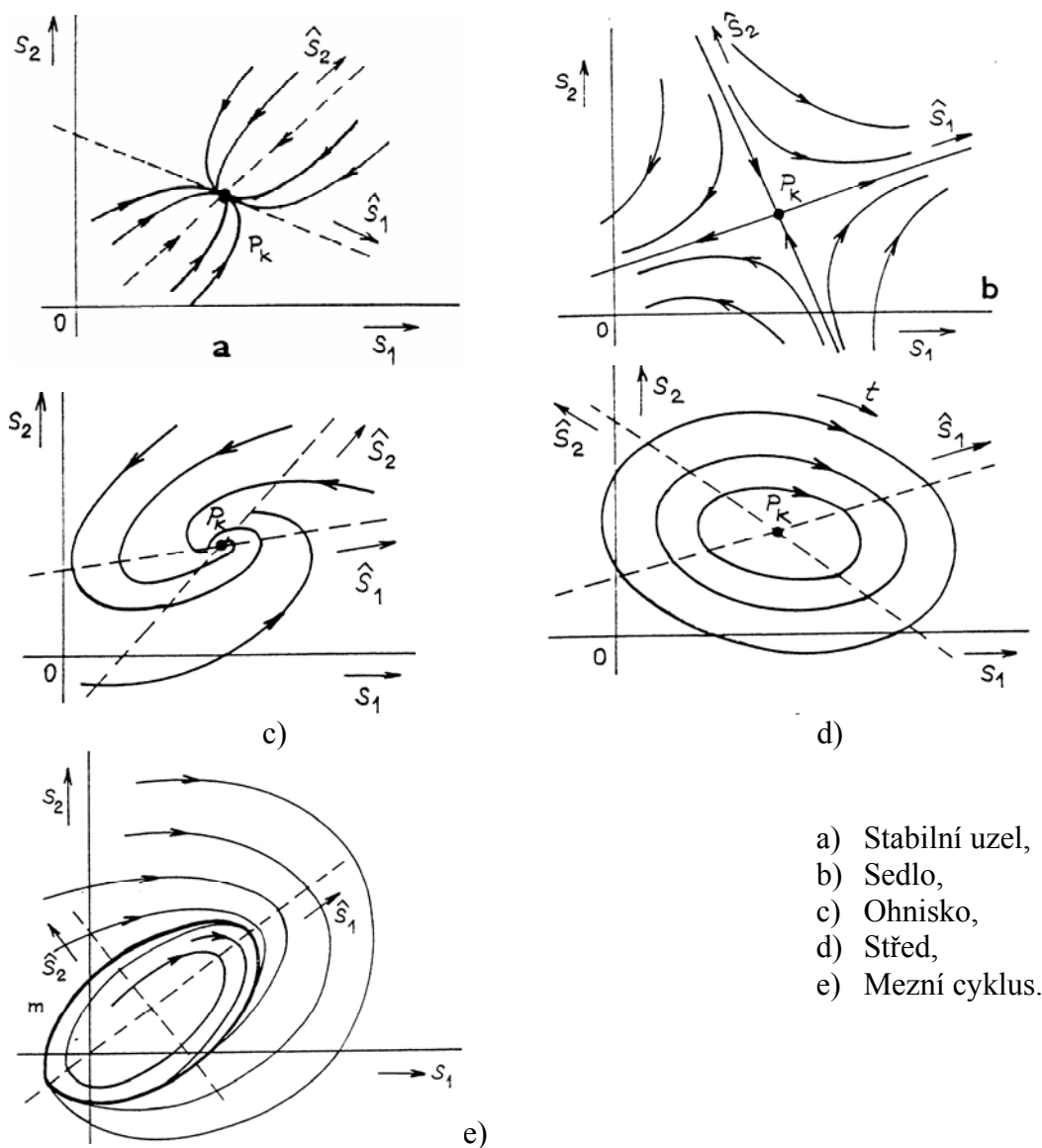
12.5.4 Řešení nelineárních obvodů 2. řádu

NEO 2. řádu jsou často používanými obvody. Příklad takového obvodu jsme uvedli na **Obr. 105**, kde nelineární byl pouze R_N . Nelineární však mohou být i další stavební prvky (R , L i C). Takovýto obecný nelineární autonomní obvod 2. řádu (bez vnějšího buzení) lze obecně popsat následujícími stavovými rovnicemi (se dvěma stavovými veličinami s_1, s_2)

$$\frac{ds_1}{dt} = f_1(s_1, s_2), \quad (12.22a) \quad \frac{ds_2}{dt} = f_2(s_1, s_2). \quad (12.22b) \quad (12.22)$$

Grafické řešení těchto rovnic provádíme ve (fázové) **stavové rovině** $s_1 - s_2$. Pracovní bod $P[s_1, s_2]$ se z výchozího bodu P_V pohybuje po **stavové trajektorii** do klidového bodu P_K a to **stavovou rychlostí** $\vec{v}$ (12.23a). Tento vektor má dvě složky v_1 a v_2 (12.23).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{f}(\vec{s}), \quad (12.23a) \quad v_1 = \frac{ds_1}{dt}, \quad (12.23b) \quad v_2 = \frac{ds_2}{dt}. \quad (12.23c) \quad (12.23)$$



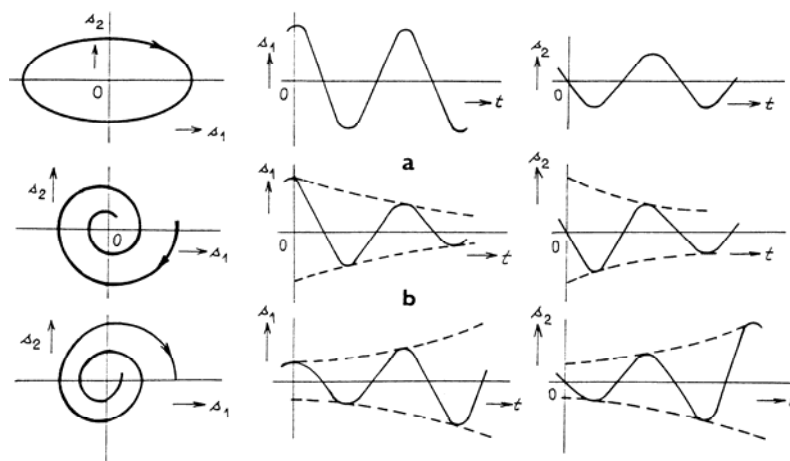
Obr. 106: Typické stavové portréty obvodu 2. řádu.

Vztah pro **směrové pole** (12.24) dostaneme podělíme-li rovnice (12.23c) a (12.23b)

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{f_2(s_1, s_2)}{f_1(s_1, s_2)} = \hat{f}(s_1, s_2) \quad (12.24)$$

Při konstrukci směrového pole můžeme použít **metodu izoklin** [4]. Potřebnou rovnici, popisující soustavu izoklin, získáme, položíme-li derivaci ve vztahu (12.24) konstantě. Znalost směrového pole a počátečních podmínek (výchozího bodu P_k) umožní pak zkonstruovat hledané stavové trajektorie. Vektor stavové rychlosti ($\vec{v}$) je tečnou ke stavové trajektorii. Přesnost, s jakou získáme řešení (trajektorii), je dána hustotou sítě izoklin.

Přiřadíme-li ke stavové rovině ($s_1 - s_2$) časovou osu (t), získáváme **rozšířený stavový prostor**, který je vhodný k zobrazení dějů v obvodech 2. řádu. Soustavu stavových trajektorií, zobrazující možné děje v daném obvodu, při různých počátečních podmínkách nebo různém buzení, nazýváme **stavovým portrétem** (obrazem) obvodu. Příklady různých stavových portrétů jsou na **Obr. 106**.



Obr. 107: Stavové trajektorie a odpovídající časové průběhy stavových veličin.

Stavové trajektorie jsou vhodným grafickým zobrazením dynamických vlastností obvodu. Jejich tvar závisí na zapojení obvodu, na parametrech jeho prvků, na charakteru nelinearity a na počátečních podmínkách v obvodu. Z průběhu stavové trajektorie lehce odvodíme časové průběhy stavových veličin $s_1(t)$ a $s_2(t)$. Souvislost je patrná z **Obr. 107**.

12.5.5 Metoda linearizace po částech

Metoda spočívá v aproximaci charakteristiky nelineárního prvku (kap.4.2) několika na sebe navazujícími přímkami, což umožní přejít od nelineární diferenciální rovnice k několika diferenciálním rovnicím lineárním. Pro každý úsek charakteristiky platí jiná diferenciální rovnice. Obvykle se tyto rovnice liší pouze hodnotami koeficientů. Daný nelineární obvod řešíme jako lineární, a to několikrát pro každý úsek zvlášť. Jednotlivá řešení musí na sebe navazovat (podle toho volíme jejich počáteční podmínky). Proto se tato metoda taky nazývá „metoda sešívání“. Blíže viz. [4].

12.5.6 Metoda ekvivalentní linearizace

Při řešení oscilátorů, rezonančních zesilovačů a dalších velmi selektivních nelineárních obvodů, kde převládají pouze první harmonické obvodových veličin, se s výhodou používá **kvazilineární metoda** (jak se tato metoda také jinak nazývá).

Podstatou zjednodušení je náhrada nelineárního prvku fiktivním lineárním **ekvivalentním parametrem** (modifikovaným, středním), definovaným poměrem amplitud prvních harmonických.

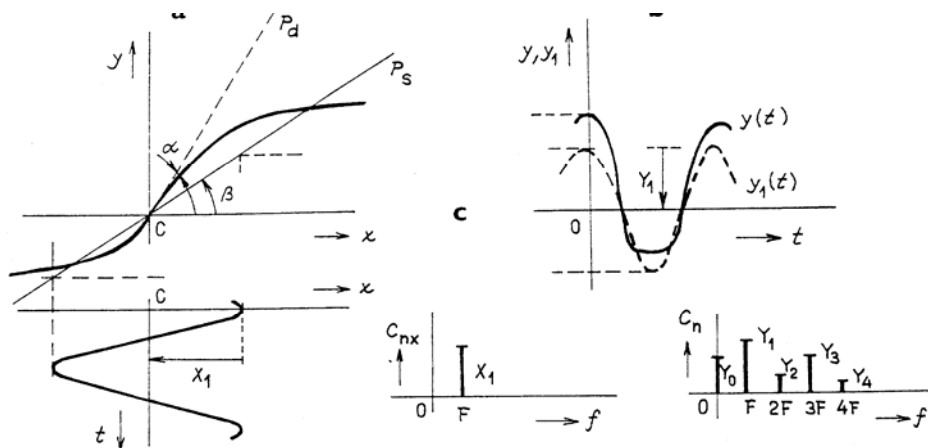
Střední ekvivalentní odpor je tedy definován vztahem

$$R_s = \frac{U_1}{I_1} = f(I_1) , \quad (12.25)$$

Jeho hodnota je závislá na budící veličině (I_1) a poloze pracovního bodu na A-V charakteristice nahrazovaného nelineárního rezistoru.

Obdobně lze definovat i modifikované parametry akumulacních prvků, např. **modifikovaná (střední) kapacita**. Také modifikované parametry řízených dvojpolů i dvojbranů (hovoříme např. o **modifikované strmosti**, modifikované přenosové admitanci). Po náhradě lze pak obvod řešit známými lineárními metodami (kap. 6). Geometrická

interpretace a srovnání středního a diferenciálního parametru je na **Obr. 108** Při kvazilineární náhradě (ekvivalenci) platí princip harmonické a energetické rovnováhy (invariantnosti) [4].



Obr. 108: Srovnání ekvivalentního a diferenciálního parametru.

12.5.7 Metoda pomalu se měnící amplitudy

Při řešení ustalování kmitů v nelineárních selektivních obvodech se amplituda obvodových veličin (kmitů) mění pomalu vzhledem k periodě kmitů. Pak lze snížit řád diferenciální rovnice popisující obvod a obvykle ji také výrazně zjednodušit tím, že nebudeme hledat časovou změnu okamžitých hodnot obvodových veličin $x(t)$, nýbrž časovou změnu amplitudy $\Delta x(t)$, která se mění daleko pomaleji. Více o této metodě najdete v [4].

12.6 Numerické metody řešení nelineárních obvodů

Analytické řešení nelineárních algebraických a zvláště pak nelineárních diferenciálních rovnic, popisujících daný obvod, není jednoduché někdy dokonce ani možné, proto se často uchylujeme k metodám numerickým. Rozvoj těchto metod nastal s rozšířením počítačů, s větší dostupností vhodných matematických programů (MATLAB, MATCAD etc.), objevením se prvních jednoúčelových programů pro stejnosměrnou (DC) analýzu NEO (např. DANC), jiných programů pro časovou analýzu NEO (např. DYNO), až po současné moderní víceúčelové obvodové simulátory (např. PSpice).

Prvním předpokladem úspěšné analýzy NEO na počítači jsou vhodné a výstižné modely nelineárních prvků (kap. 4). Od nich se odvíjí kvalita výpočtu.

12.6.1 Stejnosměrná analýza obvodů

V další etapě je zapotřebí zvolit vhodnou numerickou metodu pro **statické řešení** (stejnosměrnou analýzu) obvodu. Nebo-li určení klidového pracovního bodu všech stavebních prvků v NEO. Klidové hodnoty obvodových veličin je možné vypočítat tak, že z obvodu odstraníme všechny setrvačné prvky (C se vypustí, L nahradí zkratem), získáme tak **zbytkový rezistivní obvod** (model).

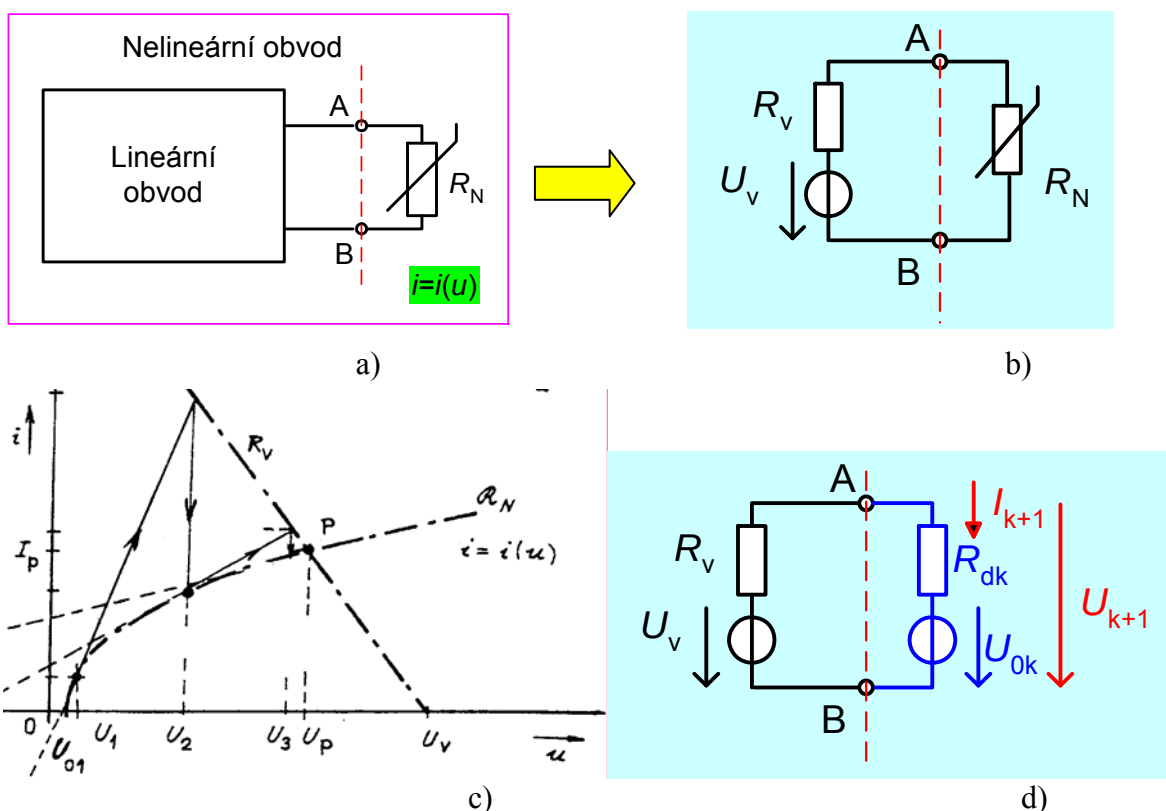
Numerické metody k řešení zbytkového nelineárního obvodu jsou založeny na vhodném **iterativním postupu**. Při iteraci nahrazujeme řešení nelineárního obvodu opakovaným řešením náhradního obvodu lineárního. V současných programech se převážně používá iterace Newtonova-Raphsonova nebo její modifikace. Známá je také pod názvem metoda

tečen. Tato metoda není tak spolehlivá jako metoda regula-falsi (může divergovat), její předností je však rychlejší konvergence a hlavně možnost jednoduchého zobecnění na více proměnných.

Pro jednoduchost budeme předpokládat čistě rezistivní NEO), popsany obecně nelineární rovnicí $F(x) = 0$, kde x je obecně vektor obvodových veličin. My se však pro jednoduchost omezíme na veličinu jednu (u na bráně AB) a závěry pak zobecníme. V prvním kroku iterativního řešení volíme odhadem první hodnotu $x = x_1$. V dalších krocích pak hodnotu x upřesňujeme ($x_2, x_3, \dots$), podle určitého rekurentního předpisu $x_{k+1} = P[x_k, F(x)]$, dle typu iterace. U metody Newtonovy-Raphsonovy je předpis definován vztahem (jde v podstatě o první dva členy Taylorovy řady)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \quad (12.26)$$

Posloupnost přibližných řešení musí konvergovat k jistému (hledanému) kořenu (x_P). Výpočet ukončíme, když rozdíl výsledků následujících posledních kroků je menší než dovolená chyba.



Obr. 109: Řešení NEO metodou tečen.

Uvažovaný obvod na **Obr. 109a** rozdělíme na lineární část a nelineární rezistor R_N , s A-V charakteristikou $i = i(u)$ (**Obr. 109c**). Lineární část nahradíme Théveninovým ekvivalentem (U_v, R_v) na **Obr. 109b**, čímž jsme získali jednoduchý model popsany rovnicí

$$F(u) = R_v \cdot i(u) + u - U_0 \quad (12.27)$$

Aplikací definičního předpisu (12.26) na nelineární rovnici (12.27) dostáváme konkrétní tvar rovnic iteračního procesu pro tento obvod (**Obr. 109**)

$$U_{k+1} = U_k - \frac{R_v \cdot i(U_k) + U_k - U_v}{R_v \cdot i'(U_k)}, \text{ kde } i'(U_k) = \left. \frac{\partial i(u)}{\partial u} \right|_{u=U_k} = R_{dk}^{-1} \quad (12.28)$$

Derivace proudu $i'(U_k)$ představuje diferenciální vodivost v pracovním bodě $P_k (U_k, I_k)$. Zavedeme-li napětí vyřáté tečnou v P_k na vodorovné ose (**Obr. 109c**),

$$U_{ok} = U_k - \frac{i(U_k)}{i'(U_k)}, \quad (12.29)$$

lze vztah (12.28) upravit do tvaru

$$U_{k+1} = U_v \frac{R_{dk}}{R_{dk} + R_v} + U_{ok} \frac{R_v}{R_{dk} + R_v}. \quad (12.30)$$

Této rovnici odpovídá obvod na **Obr. 109d**. Nelineární rezistor R_N je u této metody modelován zdrojem napětí U_{ok} (12.29) a diferenciálním rezistorem R_{dk} (12.28), tedy parametry určenými hodnotami z předchozího kroku. Model na **Obr. 109d** lze převést na Nortonův ekvivalent se zdrojem proudu.

Grafické řešení tohoto příkladu Newtonovou-Raphsonovou iterací je na **Obr. 109c**. Z něj je vidět jak řešení postupně konverguje k hledanému bodu P a to pomocí tečen vedených v každém kroku k A-V charakteristice nelineárního rezistoru.

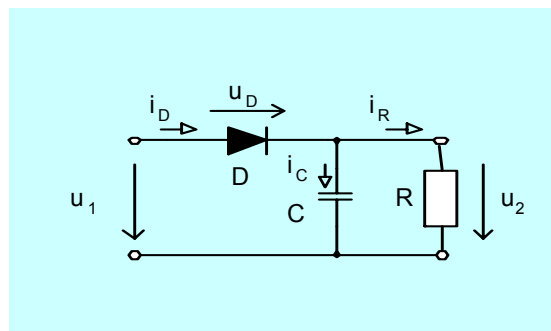
Uvedené poznatky se dají rozšířit i na obvody s více nelineárními rezistory a také i na obvody s více proměnnými [1], [15].

12.6.2 Řešení setrvačných obvodů

Při řešení setrvačných nelineárních obvodů (s akumulacími prvky L, C) je zapotřebí numericky integrovat soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Použijeme k tomu některou z explicitních a nebo implicitních integračních metod (rozlišují se dle požadovaného tvaru rovnic, které zpracovávají). Jejich princip je založen na náhradě derivací poměrem diferencí nebo složitějšími polynominálními vztahy. Jednoduchou náhradu (diferencemi) používá **Eulerova metoda**. Vzhledem k postupu ve směrovém poli se explicitní Eulerova metoda nazývá **dopředná**, implicitní pak **zpětná** Eulerova metoda. V současných programech se však používají složitější náhrady s polynominálními vztahy, které vedou k přesnějším výsledkům. Explicitní metody vyžadují, aby délka integračního kroku byla volena s ohledem na možný nejrychlejší děj v obvodu (na nejmenší časovou konstantu). Nesplníme-li tuto podmínku, výsledky nebudou věrohodné a prakticky budou nepoužitelné. Implicitní metody připouští delší integrační krok, aniž je na výsledcích patrná odchylka (pouze rychlé děje nebudou v obvodě postihnuty). Výpočet je však složitější, v každém integračním kroku nutno iterací řešit (nejčastěji modifikací Newtonovy metody).

Příklad 12.8 Numerické řešení nelineárního obvodu 1. řádu.

Na **Obr. 110** je jednoduchý setrvačný nelineární obvod 1. řádu – usměrňovač s kapacitní zátěží. Parametry prvků jsou: $C = 100\mu\text{F}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $u_i = U_i \sin(2\pi f t)$, $U_i = 5\text{V}$, $f = 50\text{Hz}$. Dioda je popsána rovnicí (4. 12), kde $U_T = 25\text{mV}$, $I_S = 100\text{pA}$ a $R_S = 0$. Sestavte diferenciální rovnici popisující napětí na kondenzátoru. Rovnici řešte numericky v Matlabu v čase $t \in \langle 0, 40\text{ms} \rangle$, pomocí dopředné Eulerovy metody. Výsledek zobrazte v grafu.

**Obr. 110:** Nelineární obvod 1. řádu.*Řešení:*

Nejprve budeme uvažovat čistě kapacitní zátěž (bez rezistoru R). Tehdy bude obvod popsán následující stavovou rovnicí

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{I_s}{C} [e^{a(U \cos \omega t - u_c(t))} - 1]. \quad (12.31)$$

Tuto rovnici budeme řešit Eulerovou integrační metodou. Při tom předpokládáme nulové počáteční podmínky. Zavedeme stavovou rychlost a v ní derivaci nahradíme poměrem diferencí

$$v = \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{\Delta u_c}{\Delta t} = \frac{u_c(t_{k+1}) - u_c(t_k)}{t_{k+1} - t_k}. \quad (12.32)$$

U dopředné Eulerovy metody přisoudíme hodnotu stavové rychlosti vypočtené dle vztahu (12.32) časovému okamžiku t_k . Stavová rovnice (12.31) přechází pak do tvaru

$$v_k(t_k) = \frac{u_c(t_{k+1}) - u_c(t_k)}{\Delta t} = \frac{I_0}{C} [e^{a(U \cos \omega t_k - u_c(t_k))} - 1]. \quad (12.33)$$

Z něhož lehce odvodíme rekuretní vztah pro výpočet napětí na kapacitoru

$$u_c(t_{k+1}) = u_c(t_k) + \Delta t \frac{I_0}{C} [e^{a(U \cos \omega t_k - u_c(t_k))} - 1]. \quad (12.34)$$

Tuto rovnici (12.34) můžeme řešit vhodnou iterací (např. Newtonovou metodou). Hodnotu času postupně zvětšujeme o časový krok Δt . Napětí $u_c(t_{k+1})$, vypočtené podle (12.34), je výchozí hodnotou u_c pro další krok. Výpočet opakujeme až do doby t překračující horní mez intervalu, ve kterém máme řešit přechodný děj. Výsledkem je pak časový průběh napětí $u_c(t)$.

12.7 Určení spektra signálů v nelineárních obvodech

12.7.1 Působení jednoho harmonického signálu na nelineární rezistor

V kap. 12.1 bylo ukázáno, že v obvodech s nelineárními prvky dochází ke **změně tvaru časového průběhu signálu**, tj. i ke změně jejich **kmitočtového spektra**.

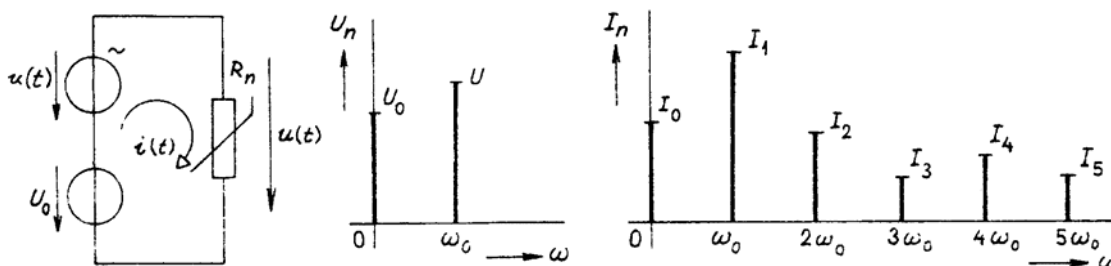
Je-li nelineární rezistor R_n (Obr. 111a) připojen ke zdroji stejnosměrného napětí U_0 zapojeného do série se zdrojem harmonického signálu $u_-(t) = U \cos \omega_0 t = U \cos \alpha$, pak napětí na nelineárním rezistoru je

$$u(t) = U_0 + U \cos \omega_0 t. \quad (12.35)$$

Vzhledem k nelinearitě A-V charakteristiky $i = f(u)$ bude proud $i(t)$ neharmonický a lze ho vyjádřit Fourierovou řadou

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos \alpha + I_2 \cos 2\alpha + I_3 \cos 3\alpha + \dots, \quad (12.36)$$

kde I_0 je stejnosměrná složka, $I_0, I_1, I_2, I_3, \dots$ jsou amplitudy jednotlivých harmonických složek kmitočtového spektra proudu. Ze srovnání graficky vyjádřených čárových spekter amplitud budicího napětí (**Obr. 111b**) a vybuzeného proudu (**Obr. 111c**) je zřejmé, že spektrum proudu obsahuje kromě stejnosměrné složky a složky o základním kmitočtu ω_0 ještě tzv. **vyšší harmonické** složky, které se ve spektru budicího napětí vůbec nevyskytovaly.



Obr. 111: Působení jednoho harmonického napětí na nelineární rezistor.

a) Zapojení obvodu, b) spektrum budicího napětí, c) spektrum proudu.

Stejně je tomu u nelineárních řízených rezistorů, nelineárních dvojbranů (např. BJT) a také u nelineárních induktorů a kapacitorů. Změny kmitočtového spektra signálů v NEO se využívá k uskutečnění nejrozličnějších operací, které lineárními obvody nelze vůbec realizovat.

12.7.2 Určení složek spektra

Pro určení spektra signálů v NEO v současné době použijeme jednoduše počítače s obvodovým simulátorem (PSpice, Microcap). Jde většinou o nastavbu nad časovou (Transient) analýzou. Podrobnou spektrální analýzu lze provést i pomocí matematických programů (MATLAB). Můžeme také použít přístroje zvané harmonické analyzátoři.

Pro jednoduché ruční výpočty spektra, pro rychlé vysvětlení činnosti různých obvodů a hlavně pro jednoduchý návrh (případně syntézu) různých NEO, použijeme zjednodušené následně uvedené postupy, založené na vhodné aproximaci nelineárního prvku. Použitý různý druh aproximace (kap. 4.2) určuje způsob stanovení amplitudy jednotlivých složek spektra.

12.7.3 Určení složek spektra proudu při aproximaci mocninovým polynomem

Je-li A-V charakteristika nelineárního rezistoru aproximována (kap. 4.2) v okolí klidového pracovního bodu mocninovým polynomem (4.5) s koeficienty a_n , pak pro určení amplitud jednotlivých složek spektra proudu byl v [4] odvozen obecný vztah

$$I_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{2^{2n+k-1} n! (n+k)!} a_{2n+k} U^{2n+k}, \quad (12.37)$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ je pořadové číslo příslušné harmonické složky. Velikost jednotlivých složek závisí na tvaru charakteristiky nelineárního prvku (přes koeficienty a_n), tak i na amplitudě vstupního signálu (U). Počet harmonických složek (k), které jsme schopni učit závisí na stupni aproximujícího polynomu.

Z obecného vztahu (12.37) dostaneme pro stejnosměrnou složku

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_2 U^2 + \frac{3}{8}a_4 U^4 + \dots \quad (12.38)$$

Pro amplitudu první harmonické

$$I_1 = a_1 U + \frac{3}{4}a_3 U^3 + \frac{5}{8}a_5 U^5 + \dots, \quad (12.39)$$

Pro amplitudu druhé harmonické

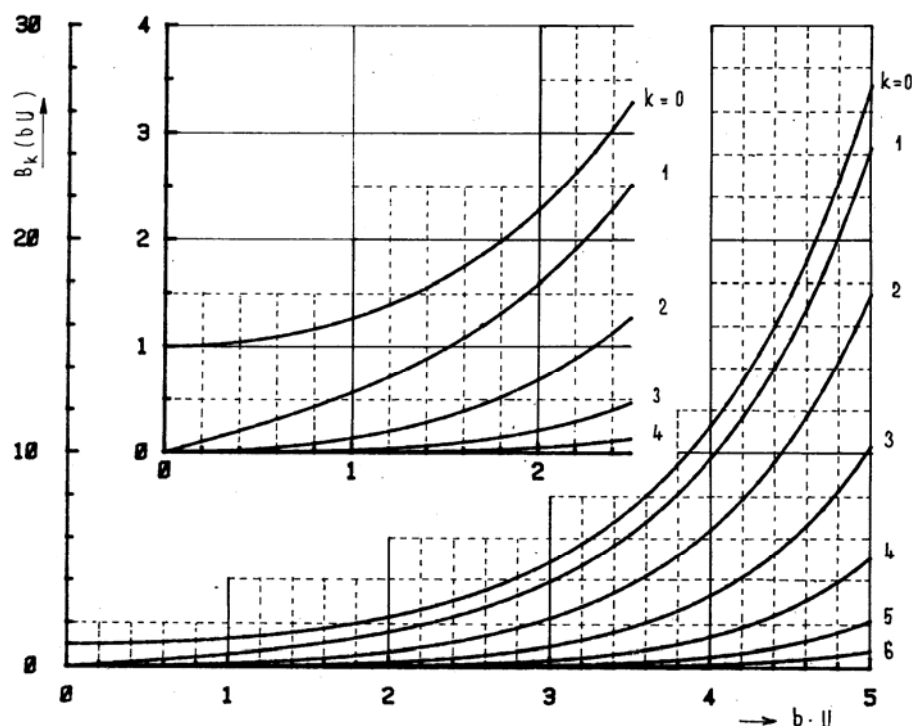
$$I_2 = \frac{1}{2}a_2 U^2 + \frac{1}{2}a_4 U^4 + \frac{15}{32}a_6 U^6 + \dots \quad (12.40)$$

12.7.4 Určení složek spektra proudu při aproximaci exponenciálou

Při aproximaci A-V charakteristiky exponenciálou (4.7), posunutou do pracovního bodu (což je dáno napětím U_0), jsou jednotlivé harmonické složky určeny modifikovanými Besselovými funkcemi (imaginárního argumentu), jak je blíže rozebráno v [4]. Máme-li k dispozici buď tabulky nebo grafy (Obr. 112) těchto funkcí (B_k), můžeme snadno vypočítat, jak stejnosměrnou složku proudu (I_0), tak i amplitudu k -té harmonické (I_k) a to z následujících jednoduchých vztahů

$$I_0 = i_0 e^{bU_0} B_0(bU), \quad I_k = 2i_0 e^{bU_0} B_k(bU). \quad (12.41)$$

Velikost jednotlivých složek opět závisí na amplitudě vstupního signálu (U), na parametrech aproximující exponenciály (i_0, b) a na poloze pracovního bodu (U_0).



Obr. 112: Modifikované Besselovy funkce k -tého řádu argumentu (bU).

12.7.5 Určení složek spektra proudu při aproximaci lomenou přímkou

V řadě praktických úloh a aplikací NEO vystačíme s jednoduchou aproximací A-V charakteristiky nelineárního rezistoru lomenou přímkou (**Obr. 113**). V tom případě při harmonickém napětí $u(t)$ (12.35), má proud $i(t)$ tvar omezeného harmonického signálu. Úroveň omezení je dána hodnotou stejnosměrného napětí U_0 , určujícího polohu klidového pracovního bodu Q . Dále pak hodnotou tzv. **závěrného** napětí U_Z , určujícího polohu bodu zlomu A-V charakteristiky. A konečně také amplitudou budícího napětí U .

Tyto tři hodnoty definují další důležitou veličinu zvanou **poloviční úhel otevření** proudu Θ , který udává, jakou část periody budícího signálu protéká nelineárním prvkem nenulový proud. Z **Obr. 113** je zřejmé, že platí jednoduchý vztah

$$\cos \Theta = \frac{-U_0 + U_Z}{U} . \quad (12.42)$$

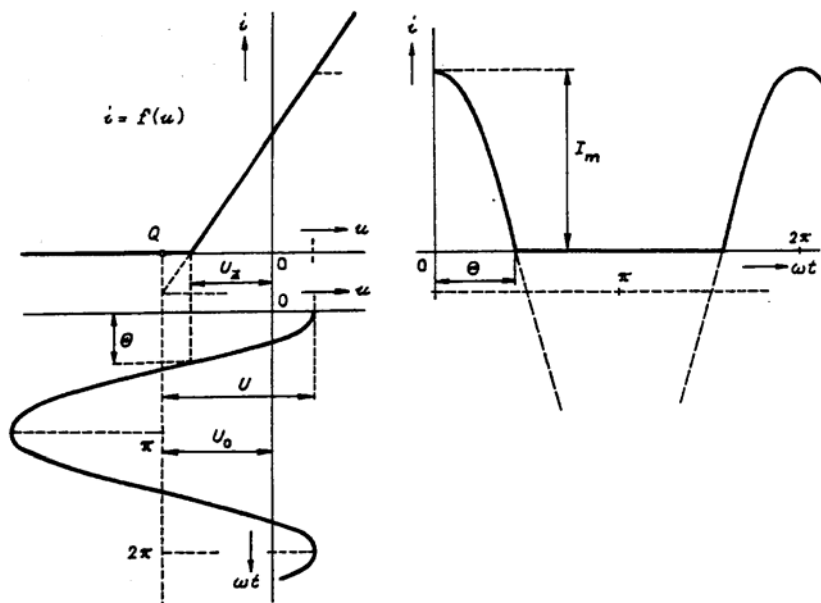
Maximální hodnotu impulsů proudu je

$$I_m = SU(1 - \cos \Theta) . \quad (12.43)$$

V intervalu $[-\Theta, +\Theta]$ lze proud analyticky popsat vztahem

$$i(t) = I_m \frac{\cos \omega t - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} . \quad (12.44)$$

Po zbytek periody je proud nulový.



Obr. 113: Aproximace A-V charakteristiky lomenou přímkou.

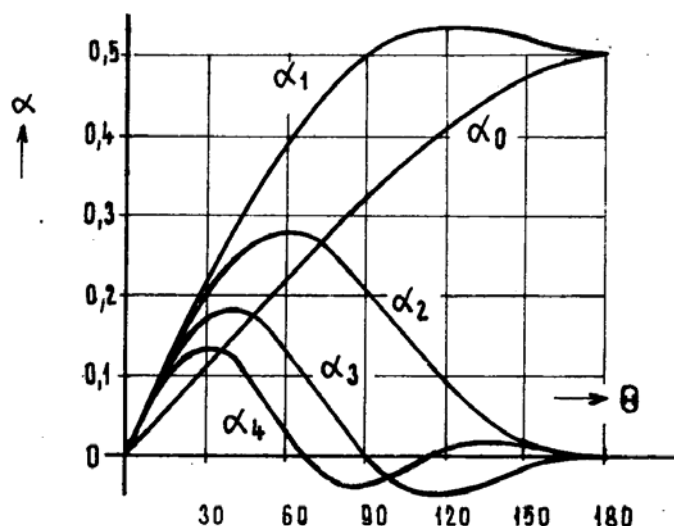
Pak tento periodický neharmonický průběh lze rozložit ve Fourierovu řadu tak, jak je blíže uvedeno v [4]. Ze vztahů pro koeficienty Fourierovy řady vychází obecný výraz pro amplitudu n -té harmonické ve tvaru

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} I_m \frac{\cos \omega t - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \cos n(\omega t) d(\omega t) = \dots = I_m \frac{2(\sin n\Theta \cos \Theta - n \sin \Theta \cos n\Theta)}{n\pi(n^2 - 1)(1 - \cos \Theta)} \quad (12.45)$$

Vyčíslením (12.45) vznikl pro praxi vhodnější vztah

$$I_n = I_m \alpha_n(\Theta) = SU \gamma_n(\Theta) . \quad (12.46)$$

Koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (resp. $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$) se nazývají **činitelé rozkladu** a jsou funkcemi polovičního úhlu otevření Θ (Obr. 114). Graf je znám pod názvem Schulzův diagram.



Obr. 114: Činitelé rozkladu v závislosti na polovičním úhlu otevření.

12.7.6 Působení několika harmonických signálů na nelineární rezistor

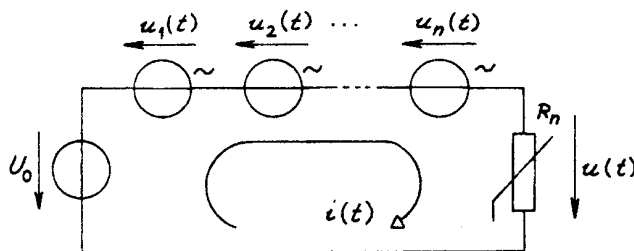
Na nelineární rezistor R_n může obecně působit (kromě stejnosměrného napětí U_0) ještě dalších n harmonických napětí $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ o různých kmitočtech (Obr. 115),

$$u_n(t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = U_n \cos \alpha_n . \quad (12.47)$$

Výsledné napětí na R_n je

$$u(t) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) . \quad (12.48)$$

Toto napětí dosadíme do analytického popisu A-V charakteristiky R_n a obdržíme výraz pro proud. Pro konkrétní tvar aproximační funkce A-V charakteristiky vychází různě složité vztahy pro amplitudy jednotlivých složek spektra proudu [4]. Při aproximaci lomenou přímkou se již při působení dvou harmonických napětí objeví v těchto vztazích eliptický integrál, což pro technickou praxi není vhodné. Nejvhodnější je aproximace exponenciálou. V případě působení malého počtu vstupních signálů také **mocninovým polynomem**. Pro větší počet budících napětí vychází vztahy pro amplitudy jednotlivých složek příliš složité.



Obr. 115: Působení několika harmonických signálů na nelineární rezistor.

Příklad 12.9 *Působení dvou harmonických signálů.*

Odvoďte vztahy pro jednotlivé složky spektra proudu, je-li A-V charakteristika R_n popsána polynomem RRR druhého řádu a působí-li v obvodu dvě harmonická napětí.

Náznak řešení:

Do RRR dosadíme RRR a výraz upravíme, při tom použijeme známé vztahy pro $\cos^2(\alpha)$, $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$. Dostáváme následující výsledek

$$\begin{aligned} i = & a_0 + \frac{1}{2}a_2U_1^2 + \frac{1}{2}a_2U_2^2 + \\ & + a_1U_1 \cos \alpha_1 + a_1U_2 \cos \alpha_2 + \\ & + \frac{1}{2}a_2U_1^2 \cos 2\alpha_1 + \frac{1}{2}a_2U_2^2 \cos 2\alpha_2 + \\ & + \frac{1}{2}a_2U_1U_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}a_2U_1U_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (12.49)$$

Vidíme, že ve spektru se objevila stejnosměrná složka, první a druhé harmonické, ale také dvě složky o kombinačních kmitočtech $(\omega_1 + \omega_2)$ a $(\omega_1 - \omega_2)$.

Z předchozího odvození lze zobecnit závěr, že ve spektru proudu se kromě stejnosměrné složky a všech harmonických každého ze vstupních signálů, objevují ještě další složky, dané součty a rozdíly násobků kmitočtů přiváděných signálů. Tyto **kombinační kmitočty** mohou obecně být

$$f_{m,n} = |k_1 * f_1 + k_2 * f_2 + \dots + k_n * f_n|, \quad k_1, k_2, \dots, k_n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (12.50)$$

Z tohoto hlediska je i stejnosměrná složka I_{00} v podstatě složkou o kombinačním kmitočtu dle (12.50), kde $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Také m -tá harmonická I_{0m} základního kmitočtu ω_1 je pak kombinační kmitočet m -tého řádu, kde $k_1 = m, k_2 = \dots = k_n = 0$, atd.

Aproximujeme-li A-V charakteristiku R_n v okolí Q **exponenciální funkcí** (4.7) stačí mít k dispozici grafy (**Obr. 112**) nebo tabulky Besselových funkcí. Amplitudy jednotlivých složek spektra se pak snadno vypočítají z obdobných vztahů jako při buzení jedním signálem (kap. 12.7.4). V [4] jsou odvozeny (přes n -rozměrné Fourierovy řady) následující velmi užitečné vztahy. **Stejnoseměrná** (nultá) složka se určí dle obecného vztahu

$$I_{0,\dots,0} = i_0 e^{bU_0} \prod_{n=1}^N B_0(bU_n) \quad (12.51)$$

Amplituda **kombinační** složky o kmitočtu $(\pm k_1\omega_1 \pm k_2\omega_2 \dots \pm k_N\omega_N)$ se určí dle obecného vztahu

$$I_{k_1,k_2,\dots,k_N} = 2i_0 e^{bU_0} \prod_{n=1}^N B_{k_n}(bU_n) \quad (12.52)$$

12.7.7 Princip harmonické a energetické rovnováhy

Princip **harmonické rovnováhy** spočívá v náhradě nelineárního rezistoru R_n (spolu se zdrojem stejnosměrného předpětí) ekvivalentním lineárním rezistorem, do něhož teče pouze proud první harmonické (I_1) při buzení ze zdroje harmonického napětí s amplitudou (U). Aby bylo možné tuto zjednodušující náhradu provést, musí být zajištěno, že vyšší harmonické složky proudu se při činnosti obvodu neuplatní. Budou potlačeny vhodným filtrem (selektivním obvodem). Může to být např. paralelní kmitavý obvod naladěný na kmitočet základní harmonické. Odpor náhradního lineárního rezistoru je roven modifikovanému

odporu (kap. 12.5.6) neboli odporu pro první harmonickou $R^{(1)}$ (12.25). Je zřejmé, že $R^{(1)}$ závisí jak na amplitudě budicího napětí (U), tak i na stejnosměrném předpětí (U_0).

$$R^{(1)} = \frac{1}{G^{(1)}} = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{\frac{1}{\pi} \int_0^t i(t) \cos \omega_0 t d(\omega_0 t)} , \quad R^{(1)} = f(U_0, U) . \quad (12.53)$$

Střední výkon dodávaný zdrojem budicího napětí do nelineárního rezistoru

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U i(t) \cos \omega_0 t d(\omega_0 t) = \frac{1}{2} U I_1 , \quad (12.54)$$

takže je dán pouze výkonem první harmonické. Náhradou nelineárního rezistoru lineárním rezistorem s odporem $R^{(1)}$ se tedy z výkonového hlediska nic nezmění, protože střední výkon dodaný do obvodu má v obou případech stejnou hodnotu. Proto se tento postup také nazývá princip **energetické rovnováhy**.

Podmínka pro harmonickou a energetickou rovnováhu je tedy zřejmě shodná. Oba popsané principy pak umožňují provést tzv. **ekvivalentní linearizaci** nelineárního obvodu. Podmínkou však je harmonický průběh budicího napětí. Stejného postupu lze použít také u obvodů s řízenými nelineárními rezistory a u obvodů s nelineárními induktory a kapacitami.

Používá-li se k analýze NEO metoda harmonické rovnováhy, je výhodné pracovat s A-V charakteristikami nelineárního rezistoru pro první harmonickou, neboť z nich se snadno určí i modifikovaný odpor či vodivost. V teorii oscilátorů se tyto závislosti nazývají **kmitové charakteristiky**.

12.7.8 Spektrální analýza signálů v parametrických obvodech

Odezva obvodu $i(t)$ s řízeným lineárním rezistorem $G(t)$, při harmonickém buzení $u(t)$ je obecně dána vztahem

$$i(t) = G(t) \cdot u(t) . \quad (12.55)$$

Funkce $G(t)$ popisuje časovou změnu vodivosti. Předpokládáme, že ta se mění periodicky. Obdobně i vstupní signál $u(t)$. Lze je tedy rozvinout do Fourierových řad

$$G(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m \cdot e^{jm\omega_1 t} , \quad (12.56a) \quad u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \cdot e^{jn\omega_2 t} . \quad (12.56b) \quad (12.56)$$

Dosazením (12.56) do (12.55) dostaneme

$$i(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_m \cdot U_n \cdot e^{j(m\omega_1 t + n\omega_2 t)} . \quad (12.57)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že v parametrických obvodech dochází ke změně spektra signálů a že zde vzniknou kombinační složky (12.50) obdobně jako v nelineárních obvodech.

12.7.9 Obecné vztahy mezi výkony

Poměry mezi výkony dodávanými a odebíranými nelineárnímu nebo parametrickému obvodu se řídí vztahy, které odvodili **Manley a Rowe**. Předpokládáme, že v NEO působí dvě budicí harmonická napětí o kmitočtech f_1 a f_2 a odezva obsahuje různé kombinační složky s kmitočty $f_{m,n}$. Omezíme se jen na kladné hodnoty

$$f_{m,n} = m \cdot f_1 + n \cdot f_2 > 0 . \quad (12.58)$$

Výkon uvažované kombinační složky označíme shodně $P_{m,n}$, při čemž výkon dodávaný bude kladný a odebíraný záporný. Pro **obvody s nelineárními rezistory** (jejichž charakteristika není klesající) platí pro výkony kombinačních složek (jenž v obvodě skutečně existují, výkony neexistujících jsou nulové)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^2 P_{m,n} \geq 0 , \quad (12.59a) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^2 P_{m,n} \geq 0 . \quad (12.59b) \quad (12.59)$$

V případě, že v obvodu působí pouze jeden budící signál (odpadne sumace přes n)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 P_m \geq 0 . \quad (12.60)$$

Pro **obvody s nelineárními akumulacími prvky** platí pro výkony kombinačních složek

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m}{m \cdot f_1 + n \cdot f_2} P_{m,n} = 0 , \quad (12.61a) \quad (12.61)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{m \cdot f_1 + n \cdot f_2} P_{m,n} = 0 . \quad (12.61b)$$

V případě, že v obvodu působí pouze jeden budící signál pak

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m = 0 . \quad (12.62)$$

Příklad 12.10 Výkonové poměry v násobiči kmitočtu.

Rozeberte výkonové poměry v násobiči kmitočtu (konstantou c).

a) s nelineárním rezistorem, **b)** s nelineárním kapacitorem.

Řešení:

Na vstupu působí signál o kmitočtu $f_1 = 1$, $m = 1$ a o výkonu P_1 . Výstupní signál má kmitočet $f_2 = c \cdot f_1$, $m = c$ a odebíraný výkon je $(-P_2)$.

a) Dle vztahu (12.60) pro obvod s nelineárním rezistorem platí

$$P_1 + c^2(-P_2) \geq 0 \Rightarrow P_2 \leq \frac{1}{c^2} P_1 . \quad (12.63)$$

Z tohoto vztahu vidíme, že např. pro zdvojovač kmitočtu ($c = 2$) s nelineárním rezistorem je maximální dosažitelný výkon signálu na výstupu pouze jednou čtvrtinou výkonu budícího.

b) Dle vztahu (12.62) pro obvod s nelineárním kapacitorem platí

$$P_1 + (-P_2) = 0 \Rightarrow P_2 = P_1 . \quad (12.64)$$

Z uvedeného je patrné, že násobič kmitočtu s nelineární reaktancí může, na rozdíl od násobiče s nelineárním rezistorem, pracovat v ideálním případě až se 100 % účinností. Toto je velká přednost všech obvodů, které pro svoji činnost využívají nelineární reaktance [4].

12.8 Kontrolní otázky z kapitoly 12

- 1) Definujte parametry nelineárního neřízeného a řízeného rezistoru.
- 2) Vysvětlete princip linearizace nelineárního neřízeného rezistoru.
- 3) Vysvětlete princip linearizace nelineárního řízeného rezistoru.
- 4) Uveďte typy používaných charakteristik obecného nelineárního dvojbranu, alespoň dvě z nich blíže definujte.
- 5) Vysvětlete princip linearizace nelineárního rezistivního dvojbranu. Uveďte příklad jeho admitančního popisu.
- 6) Odvoďte a vysvětlete způsob sestrojení zatěžovací přímky.
- 7) Vysvětlete způsob sestrojení pracovní charakteristiky vstup - výstup.
- 8) Popište různé způsoby zjednodušování analytického řešení NEO.
- 9) Popište možné stavy a děje v NEO. Nakreslete a vysvětlete různé stavové trajektorie a typické stavové portréty NEO 2. řádu.
- 10) Vysvětlete princip metody stavových proměnných.
- 11) Vysvětlete princip metody linearizace po částech, metody ekvivalentní linearizace a metody pomalu se měnící amplitudy.
- 12) Vysvětlete princip numerického řešení NEO iterační metodou Newtonovou-Raphsonovou.
- 13) Vysvětlete způsob numerického řešení setrvačných NEO.
- 14) Jak vypadá odezva NEO při buzení jedním, dvěma a více harmonickými signály?
- 15) Popište určení složek spektra proudu při aproximaci A-V charakteristiky mocninovým polynomem.
- 16) Popište určení složek spektra proudu při aproximaci A-V charakteristiky exponenciálou.
- 17) Popište určení složek spektra proudu při aproximaci A-V charakteristiky lomenou přímkou.
- 18) Vysvětlete princip harmonické a energetické rovnováhy při modelování NEO.
- 19) Popište spektrum odezvy proudu parametrického obvodu s řízeným lineárním rezistorem, při buzení jedním harmonickým napětím. Zobecněte na využití parametrických obvodů.
- 20) Co vyjadřují vztahy Manley-Rowe? Na vhodném příkladě ukažte jejich využití.

13 Citlivostní analýza obvodů

Cíle kapitoly: Seznámit se základními citlivostmi, jejich definicemi a použitím, s citlivostí obvodových funkcí, kmitočtových charakteristik, obvodových parametrů, pólů a nulových bodů. Ukázat různé víceparametrové citlivosti.

13.1 Definice základních citlivostí

Libovolná obvodová funkce, sledovaná vlastnost či parametr obvodu závisí obecně na $F = F(s, \vec{x})$, $s = j\omega$... je obraz kmitočtu, $\vec{x}$... je vektor parametrů obvodových prvků.

Parametry mohou být:

- dvojpólů (R, L, C),
- dvojbranů (y_{11}, h_{22}, S, A, B aj.),
- bloků a podobvodů (např. u filtrů 2. řádu: ω_p, Q).

V prvním přiblížení uvažujeme v obvodu jen jeden měnící se parametr x . Pak *absolutní změna* ΔF obvodové funkce F způsobená změnou parametru x o hodnotu Δx lze vyjádřit pomocí Taylorovy řady

$$\Delta F = F(p, x + \Delta x) - F(p, x) = \frac{\partial F}{\partial x} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^3 F}{3! \partial x^3} (\Delta x)^3 \dots \quad (13.1)$$

Zanedbáme-li členy s vyššími mocninami ($\Delta x \rightarrow 0$) dostáváme

$$\Delta F \doteq \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x = AS_x^F \cdot \Delta x, \quad (13.2)$$

a definujeme tak nejjednodušší *absolutní citlivost* odpovídající derivaci

$$AS_x^F \equiv D_x^F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}. \quad (13.3)$$

Obdobně jako v (13.2) lze pro *relativní změnu* obvodové funkce psát

$$\delta F = S_x^F \cdot \delta x, \quad (13.4)$$

kde, *relativní (poměrná nebo normalizovaná) citlivost* je definována vztahem

$$S_x^F = \frac{\partial F / F}{\partial x / x} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{x}{F} = \frac{x}{F} \cdot AS_x^F = \frac{d \ln F}{d \ln x}. \quad (13.5)$$

To je klasická základní definice citlivosti zavedená Bodem.

Jestliže $x = 0$ je vhodné definovat *semirelativní citlivost* (nenormalizovaná = unnormalized)

$$US_x^F \equiv S^F = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \ln F}{\partial x} = \frac{1}{F} \cdot AS_x^F. \quad (13.6)$$

Takto definovaná citlivost se hodí hlavně pro parazitní prvky (jejich hodnoty se blíží nule).

Obdobně při $F = 0$ je vhodné použít *druhou semirelativní citlivost*

$$\hat{U}S_x^F = S_x = x \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \ln x} = x \cdot AS_x^F . \quad (13.7)$$

Při výpočtu citlivostí používáme obdobné vztahy jako pro výpočet derivací. Pro nejčastěji používanou relativní citlivost je najdeme v Tab. 1.

Tab. 8: Základní pravidla pro výpočet relativních citlivostí

1	$S_x^x = S_{x^{kx}}^x = S_{kx}^x = 1$	2	$S_x^{kF} = S_x^F$
3	$S_x^{1/F} = -S_x^F$	4	$S_x^{F_1/F_2} = S_x^{F_1} - S_x^{F_2}$
5	$S_x^{F^n} = n \cdot S_x^F$	6	$S_{x^n}^F = \frac{1}{n} S_x^F$
7	$S_{x^n}^{\ln F} = \frac{1}{\ln F} S_x^F$	8	$S_x^{e^F} = F \cdot S_x^F$
9	$S_x^{\prod F_i} = \sum_{i=1}^n S_x^{F_i}$	10	$S_x^{\sum F_i} = \frac{1}{\sum F_i} \sum_{i=1}^n (F_i \cdot S_x^{F_i})$
11	$S_x^{ \dot{F} } = \operatorname{Re}(S_x^{\dot{F}})$	12	$S_x^{\arg \dot{F}} = \frac{1}{\arg \dot{F}} \operatorname{Im} S_x^{\dot{F}}$
13	$S_x^{\dot{F}} = \operatorname{Re}(S_x^{\dot{F}}) + j \operatorname{Im}(S_x^{\dot{F}}) = S_x^{ \dot{F} } + j \arg \dot{F} \cdot S_x^{\arg \dot{F}}$		
14	$S_x^{F(g_1(x), g_2(x) \dots g_n(x))} = \sum_{i=1}^n S_{g_i}^F \cdot S_x^{g_i}$		

13.2 Citlivost obvodové funkce

Každou obvodovou funkci lze definovat v některém z následujících tvarů (kap. 3)

$$F(s, x) = \frac{N(s, x)}{D(s, x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j(x) s^j}{\sum_{k=0}^n b_k(x) s^k} = F_0 \frac{\prod_k (s - z_k)}{\prod_j (s - p_j)} , \quad (13.8)$$

$$\dot{F}(j\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} , \quad (13.9)$$

$$\ln \dot{F} = \ln |F| + j\varphi . \quad (13.10)$$

Pak logaritmováním a derivací vzhledem k x lze citlivost S_x^F určit z dílčích citlivostí čitatele (N) a jmenovatele (D), jako jejich rozdíl

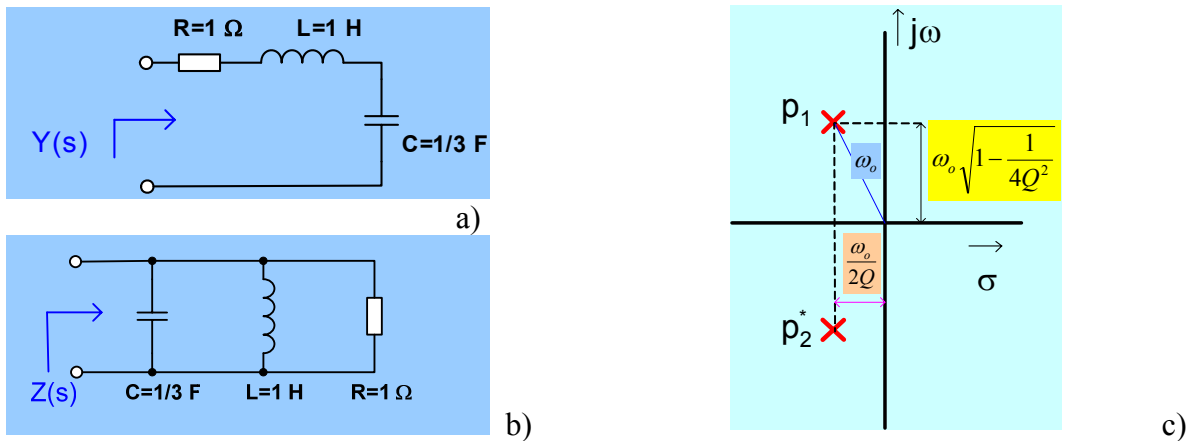
$$S_x^F = S_x^N - S_x^D . \quad (13.11)$$

Často $S_x^N = 0$ a pak $S_x^F = -S_x^D$. Citlivost jmenovatele určujeme z citlivostí koeficientů tohoto polynomu (13.8)

$$S_x^D = \frac{x}{D(s)} \sum_{i=0}^n AS_x^{b_i(x)} s^i . \quad (13.12)$$

Citlivost je racionálně lomenou funkcí proměnné s a v tomto případě ji uvažujeme v symbolickém tvaru. Citlivost závisí na tvaru obvodové funkce, na složení jednotlivých koeficientů, na jejich realizaci, tedy na zapojení obvodu. V případě, že se v koeficientech (a_i, b_k) (13.8) vyskytují rozdílové členy ($b_k = b_{kA} - b_{kB}$), bude takovýto obvod velmi citlivý.

Desenzibilace obvodu tvoří taková opatření, která sníží citlivosti na optimální hodnotu. V první řadě jde o vyhledání takových hodnot prvků x_i dané (a neměnné) struktury, aby ΔF bylo minimální. V druhém případě půjde o nalezení jiného vhodnějšího zapojení (s menší citlivostí), splňující stejnou funkci (syntéza je mnohoznačná úloha).



Obr. 116: Rezonanční obvod RLC.

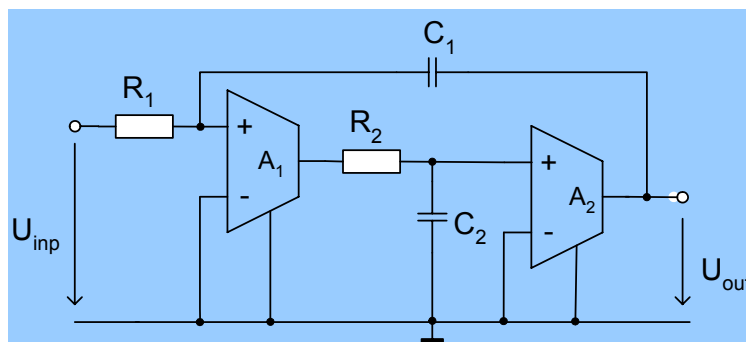
a) sériový, b) paralelní, c) parametry pólů.

Příklad 13.1 Sériový rezonanční obvod.

Napište v symbolickém tvaru admitanci sériového obvodu RLC na **Obr. 116a**. Odvoďte její relativní citlivosti na všech součástkách $S_R^{Y(s)}, S_L^{Y(s)}, S_C^{Y(s)}$.

Příklad 13.2 Citlivostní funkce.

Pro zadané normované hodnoty (**Obr. 116a**) odvoďte citlivostní funkci $S_R^{Y(j\omega)}$. Pomocí vhodného programu nakreslete kmitočtovou závislost reálné a imaginární složky $S_R^{Y(j\omega)}$, citlivostní funkci modulu a argumentu $S_R^{Y(j\omega)}$.



Obr. 117: Aktivní filtr RC se dvěma zesilovači.

Příklad 13.3 Citlivosti aktivního filtru RC.

Na **Obr. 117** je schéma aktivního filtru RC se dvěma ideálními zesilovači napětí. Určete v symbolickém tvaru přenos napětí $K(s)$ a jeho citlivosti $S_{A1}^{K(s)}$ na změnu zesílení jednotlivých zesilovačů A_i .

13.3 Citlivost kmitočtových charakteristik

Jestliže obvodová funkce je komplexní funkcí reálného kmitočtu (kap. 3.2), pak i její citlivost je obecně komplexní funkcí reálného kmitočtu. *Citlivostní funkci modulu* získáme z reálné složky

$$S_x^{|F(j\omega)|} = \operatorname{Re}(S_x^{F(j\omega)}), \quad (13.13)$$

a *citlivostní funkci argumentu* z imaginární složky citlivosti obvodové funkce

$$S_x^{\varphi(j\omega)} = \frac{1}{\varphi(j\omega)} \operatorname{Im}(S_x^{F(j\omega)}). \quad (13.14)$$

Příklad kmitočtové charakteristiky modulu citlivosti je na **Obr. 118c**. Z něj je patrné, že v různých kmitočtových pásmech je citlivost velmi rozdílná. Navíc u stejného obvodu s různými hodnotami součástek je průběh citlivostní funkce značně odlišný.

Příklad 13.4 Citlivosti různě selektivních pásmových propustí.

Pomocí programu NAF navrhnete pásmovou propust s následující specifikací:

a) $f_0 = 1$ kHz, $B_{-3\text{dB}} = 1$ kHz, $B_{-35\text{dB}} = 8$ kHz,

b) $f_0 = 1$ kHz, $B_{-3\text{dB}} = 0,1$ kHz, $B_{-35\text{dB}} = 0,8$ kHz.

Prostudujte citlivostní vlastnosti obou filtrů, především $S_{L_1}^{|K(\omega)|}$.

Řešení:

Navržená pásmová propust RLC 4. řádu má pro obě zadání stejné zapojení na **Obr. 118a**. Rozdílné jsou jen hodnoty prvků (**Tab. 9**).

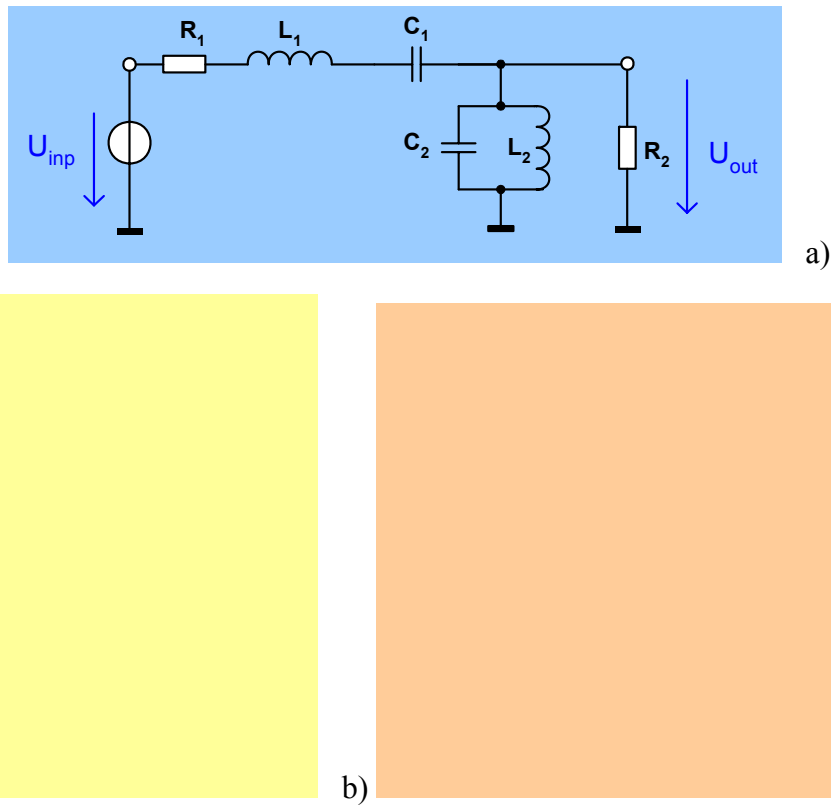
Na počítači simulované modulové charakteristiky jsou pro obě specifikace zadání na **Obr. 118b**. Pro $Q=10$ jde o velice selektivní úzkopásmovou propust. Pro $Q=1$ je charakteristika plochá.

Tab. 9: Hodnoty prvků pásmové propusti pro dvě specifikace zadání.

zapojení	Hodnoty součástek				
	L_1	C_1	L_2	C_2	$R_1 = R_2$
a) $Q=1$	224 mH	112 nF	112 mH	224 nF	1 kΩ
b) $Q=10$	2,24 H	11,2 nF	11,2 mH	2,24 μF	1 kΩ

Na **Obr. 118** je simulovaná citlivostní funkce modulu přenosu $S_{L_1}^{|K(\omega)|}$ pro obě zadané specifikace parametrů ($Q=1$ a $Q=10$). Z něj je vidět, že úzkopásmová propust ($Q=10$) má větší rozkmit hodnot citlivosti $S_{L_1}^{|K(\omega)|}$. Selektivní obvod je obecně více citlivý. V obou případech je citlivost nulová na kmitočtu naladění ($f_0 = 1$ kHz). Pak se opět k nule blíží v nepropustném pásmu. Stejný průběh má citlivost $S_{C_2}^{|K(\omega)|}$. Průběh dalších citlivostních funkcí je podobný.

Citlivostní funkce $S_x^{|F(\omega)|}$ dává dokonalý obraz o chování obvodu. Nutno však znát její grafický průběh. Proto častěji pro porovnání obvodů určujeme její hodnotu v určitém kmitočtovém bodě (popřípadě i několika), významném pro činnost obvodu (např. mezní kmitočet filtru).



Obr. 118: Navržená pásmová propust RLC.

a) schéma zapojení, b) modulové charakteristiky, c) citlivostní funkce modulu přenosu $S_{L_1}^{K(\omega)}$, pro dvě různé specifikace parametrů ($Q=1$ a $Q=10$).

13.4 Citlivost pólů a nulových bodů

S ohledem na póly (p_{oj}) a nulové body (z_{ok}), lze citlivost obvodové funkce $F(s)$ (13.8) vyjádřit následovně

$$S_x^{F(s)} = S_x^K + \sum_{j=1}^m \frac{\hat{U} S_x^{p_{oj}}}{s - p_{oj}} - \sum_{k=1}^n \frac{\hat{U} S_x^{z_{ok}}}{s - z_{ok}}, \quad (13.15)$$

a definovat *semirelativní citlivosti pólů a nulových bodů*

$$\hat{U} S_x^{p_{oj}} = \frac{d p_{oj}}{d x / x}, \quad (a) \quad \hat{U} S_x^{z_{ok}} = \frac{d z_{ok}}{d x / x}. \quad (b) \quad (13.16)$$

Tyto *kořenové citlivosti* lze z $F(s)$ vypočítat pomocí residui

$$S_x^{q_o} = \pm \text{Res} \{ S_x^{F(s)} \}. \quad (13.17)$$

Pro póly ($q_o \equiv p_o$) je znaménko (+), pro nulové body ($q_o \equiv z_o$) je znaménko (-). Tyto citlivosti poskytují komplexní hodnoty, z nichž lze dobře posoudit vlastnosti obvodu. Citlivosti jsou vyšší u násobných a blízkých kořenů, např. u úzkopásmové propusti vyšších řádů. Vyšší citlivosti vykazují kořeny blízké k imaginární ose (vyšší Q). Naopak malou citlivost mají kořeny ležící na reálné ose.

13.5 Citlivost parametrů pólů

Návrháři filtrů s výhodou posuzují vlastnosti různých zapojení z citlivosti parametrů pólů (Q_p a ω_p) na x_i . Pro parametry pólů platí definiční vztahy [3] (**Obr. 116c**)

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}, \quad Q_p = -\frac{\omega_p}{2\sigma_p} \quad (13.18)$$

z kterých lze pro tyto citlivosti odvodit

$$S_x^{Q_p} = S_x^{\omega_p} - S_x^{\sigma_p}, \quad (13.19)$$

$$S_x^{\omega_p} = \frac{1}{\omega_p^2} (\sigma_p^2 \cdot S_x^{\sigma_p} + \tilde{\omega}_p^2 \cdot S_x^{\tilde{\omega}_p}) \approx S_x^{\tilde{\omega}_p}. \quad (13.20)$$

V obvodech 2. řádu s jmenovatelem přenosu [3]

$$D(s) = s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2 \quad (13.21)$$

lze odvodit následující vztahy

$$S_{Q_p}^{K(s)} = \frac{\omega_p}{Q_p} \frac{s}{D(s)}, \quad (13.22)$$

$$S_{\omega_p}^{K(s)} = -\frac{\omega_p}{Q_p} \frac{s + 2\omega_p Q_p}{D(s)}. \quad (13.23)$$

Jestliže $s = j\omega \ll 2\omega_p Q_p$, $Q_p \gg 1$, pak

$$\left| S_{Q_p}^{K(s)} \right| \ll \left| S_{\omega_p}^{K(s)} \right|. \quad (13.24)$$

Pro praktické aplikace je dobré vědět, že změna kvality pólu se na změně přenosové funkce projevuje daleko méně než změna kmitočtu pólu, proto ji můžeme často i zanedbat.

Příklad 13.5 Citlivosti paralelního rezonančního obvodu.

Pro paralelní rezonanční obvod na **Obr. 116b**, se stejnými hodnotami součástek jako u obvodu sériového **Obr. 116a**, vypočítejte citlivosti parametrů pólů Q_p a ω_p na R, L i C .

13.6 Součin zisku a citlivosti

V aktivních obvodech, se zesilovačem (A_0) a s kmitočtově závislou zpětnou vazbou (RC podobvod), lze jako srovnávací parametr obdobných zapojení použít součin zisku K_0 (uzavřené smyčky) a relativní citlivosti na něj, tzv. **GSP** (gain sensitivity produkt)

$$GSP = K_0 S_{K_0}^F. \quad (13.25)$$

Kmitočet a kvalita pólu (Q_p, ω_p) závisí v těchto obvodech i na zesílení A_0 . Pro jejich změnu byly odvozeny následující vztahy

$$\delta\omega_p \approx S_K^{\omega_p} S_{A_0}^K \delta A_0 \approx -(K_0 S_K^{\omega_p}) \frac{\Delta A_0}{A_0^2} = GSP_{\omega} \frac{\Delta A_0}{A_0^2}, \quad (13.26)$$

a obdobně

$$\delta Q_p \approx S_K^{Q_p} S_{A_0}^K \delta A_0 \approx -(K_0 S_K^{Q_p}) \frac{\Delta A_0}{A_0^2} = GSP_Q \frac{\Delta A_0}{A_0^2}. \quad (13.27)$$

V obvodech ARC jsou tyto změny dále závislé i změnách všech R_i a C_j . Pro změnu kmitočtu pólu pak platí

$$\delta\omega_p = \sum_{i=1}^r S_{R_i}^{\omega_p} \delta R_i + \sum_{j=1}^c S_{C_j}^{\omega_p} \delta C_j + \sum_{k=1}^A S_{A_k}^{\omega_p} \delta A_k. \quad (13.28)$$

Pro změnu kvality pólu lze psát obdobný vztah. Změna zesílení δA nemá obvykle na změnu kmitočtu $\delta\omega_p$ výraznější vliv (zanedbáváme ji), kdežto u změny δQ_p hraje významnou roli.

13.7 Víceparametrové souhrnné citlivosti

V předchozích kapitolách jsme uvažovali změnu pouze jednoho parametru v obvodě. Obecně je obvodová funkce funkcí více parametrů $F = F(\vec{x})$, v mezním případě všech součástí co tvoří obvod. Ty se mohou měnit současně a pak

$$\delta F \approx \sum_{i=1}^n S_{x_i}^F \delta x_i. \quad (13.29)$$

Relativní změna jednotlivých parametrů δx_i je menší než dovolená tolerance (t_i)

$$\delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_i} \leq t_i. \quad (13.30)$$

Diskrétní součástky mají toleranci několik procent z jmenovité hodnoty. U integrovaných obvodů jsou tolerance vyšší.

Jestliže změna je u všech součástí stejná $\delta x_i = \delta x$, lze ji ve vztahu (13.29) vytknout před sumu a rovnici přepsat do tvaru

$$\delta F \approx \delta x \cdot \sum_{i=1}^n S_{x_i}^F = \delta x \cdot MS_x^F \quad (13.31)$$

a definovat *souhrnnou víceparametrovou citlivost* (multiparameter sensitivity)

$$MS_x^F = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^F. \quad (13.32)$$

Tuto úvahu lze zobecnit i na maximální změnu, t.j. *nejhorší případ* (worst-case). Tehdy odchylky dosahují krajních hodnot tolerancí $\delta x_i = \pm t_i$. Pak vztah (13.31) lze modifikovat na

$$|\delta F| \leq t_i \cdot \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^F| = t_i \cdot WS_x^F \quad (13.33)$$

a definovat *nejhorší víceparametrovou citlivost* (worst-case multiparameter sensitivity)

$$WS_x^F = \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^F|. \quad (13.34)$$

Aplikace této míry však často vede k pesimistickým výsledkům a neadekvátnímu odsouzení daného obvodu.

V některém případě, díky velké toleranci součástek (t_i) a hodnotě citlivosti WS_x^F , vychází dle (13.33) neakceptovatelně velká změna obvodové funkce. Návrhář se pak snaží různými postupy získat obdobný obvod s nižší WS_x^F . Vytvářejí se i úplně nové a vhodnější obvody. Z tohoto hlediska je vhodné vědět, že pro určité zapojení nebo strukturu existuje *spodní* (low) *hranice* LWS , která se nedá překonat. Dokonce pro určitou třídu obvodů je to invariant a nelze žádným způsobem získat obvod s WS_x^F nižší než je LWS . Citlivostní optimalizací můžeme dosáhnout pouze jen, že se $WS_x^F \rightarrow LWS$. Hodnota LWS je tedy jakousi nivelační hodnotou (benchmark) pro srovnávání obvodů a posuzování jejich syntézy. LWS kmitočtových charakteristik obvodů ARC lze určit dle jednoduchého vztahu

$$LWS_{R,C}^{K(\omega)} = |MS_{R,C}^{K(\omega)}|. \quad (13.35)$$

V obvodech s velkou integrací je patrný souběh změn parametrů součástek stejného typu. V tom případě je vhodné definovat *souběhovou víceparametrovou citlivost* (tracking multiparameter sensitivity)

$$TS_{x_k}^F = \left| \sum_{i=1}^k S_{x_i}^F \right|, \quad (13.36)$$

kde sumace je pouze přes prvky stejného typu (k), které mají stejnou toleranci t_k . Pak nejhorší změna se souběhem je dána vztahem

$$\delta F \leq \sum_k t_k \cdot TS_{x_k}^F. \quad (13.37)$$

Tato změna (13.37) je menší než změna daná vztahem (13.33).

Doposud uvedené míry citlivostí byly založeny na předpokladu, že odchylky δx_i dosahovaly jen až krajních mezí $\delta x_i = \pm t_i$. V praxi jsou však jejich hodnoty v tomto intervalu náhodně statisticky normálně rozloženy. Pak je vhodné použít *statistickou citlivostní míru* (statistical multiparameter sensitivity), definovanou vztahem

$$SS_x^F = \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_{x_i}^F)^2} \quad (13.38)$$

a pracovat s rozptyly odchylek

$$\sigma(\delta F) = \sigma(\delta x) \cdot SS_x^F. \quad (13.39)$$

Relativní odchylka obvodové funkce je zde také náhodně proměnná s normální distribucí, s nulovou střední hodnotou a rozptylem daným vztahem (13.39). Při tom předpokládáme, že změny parametrů jsou statisticky nezávislé.

Příklad 13.6 Víceparametrové citlivosti.

Obvod se třemi parametry $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ má na určitém kmitočtu následující jednotlivé relativní citlivosti přenosové funkce $K(j\omega)$ (jsou to komplexní čísla): $S_{x1}^{K(j\omega)} = 1 + j$, $S_{x2}^{K(j\omega)} = -2 + j$, $S_{x3}^{K(j\omega)} = -1 - 3j$. Určete souhrnnou citlivost $MS_x^{K(j\omega)}$, nejhorší citlivost $WS_x^{K(j\omega)}$, spodní hranici $LWS_x^{K(j\omega)}$ a maximální změnu modulu přenosu při $\delta x_i = 2\%$.

13.8 Invariance citlivostí

U obvodů RLC jsou obvodové funkce závislé na těchto parametrech: $F = F(R_i, L_j, D_k, s)$. Pro jednodušší zápis zavedeme $D_k = C_k^{-1}$. Pro jeho libovolnou impedanční funkci $Z(s)$ bylo odvozeno [17], že zde pro citlivosti platí

$$MS_{R_i}^{Z(s)} + MS_{L_j}^{Z(s)} + MS_{D_k}^{Z(s)} = 1 . \quad (13.40)$$

Tento výsledek je možné zobecnit na definici *citlivostního invariantu imitančních funkcí*

$$MS_{Z_i}^{Z(s)} = 1 , \quad (13.41a) \quad \text{resp.} \quad MS_{Y_i}^{Y(s)} = 1 , \quad (13.41b) \quad (13.41)$$

který říká, že úplná víceparametrová citlivost libovolné imitanční funkce obvodu na změny imitancí stejného charakteru je rovna jedné a je tedy *invariantní*.

Pro *přenosovou funkci* (napětí či proudu) byl odvozen [17] podobný vztah

$$MS_{R_i}^{K(s)} + MS_{L_j}^{K(s)} + MS_{D_k}^{K(s)} = 0 . \quad (13.42)$$

Tento výsledek je možné zobecnit na definici *citlivostního invariantu přenosových funkcí*

$$MS_{Z_i}^{K(s)} = 0 , \quad (13.43a) \quad \text{resp.} \quad MS_{Y_i}^{K(s)} = 0 . \quad (13.43b) \quad (13.43)$$

Pro obvod ARC, úpravou (13.43), dostáváme rozšířený vztah

$$MS_{R_i}^{K(s)} = MS_{C_i}^{K(s)} = S_s^{K(s)} . \quad (13.44)$$

Další úpravou (13.44) lze získat *citlivostní invarianty kmitočtových charakteristik*, modulové

$$S_\omega^{K(\omega)} = MS_{R_i}^{K(\omega)} = MS_{C_k}^{K(\omega)} \quad (13.45)$$

a argumentové

$$S_\omega^{\varphi(\omega)} = MS_{R_i}^{\varphi(\omega)} = MS_{C_k}^{\varphi(\omega)} , \quad (13.46)$$

ze kterých vyplývá vztah mezi mírou změny modulu, resp. argumentu a víceparametrovými citlivostmi. Velká změna modulu u selektivních obvodů je vždy doprovázena velkou citlivostí na změny obvodových prvků. Při tom problémy s vysokými citlivostmi narůstají v oblastech,

kde se kmitočtové charakteristiky mění rychleji (v pásmu přechodu mezi propustným a nepropustným pásmem), při vyšším řádu obvodu a vyšším činiteli jakosti.

Poznamenejme, že *sklon modulové kmitočtové charakteristiky* je úměrný součtu reálných částí relativních citlivostí přenosové funkce na změny parametrů všech setrvačných prvků (L_j, C_k)

$$\frac{\partial K(\omega)}{\partial \omega} = \frac{K(\omega)}{\omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n_L} \operatorname{Re} [S_{L_j}^K] + \sum_{k=1}^{n_C} \operatorname{Re} [S_{C_k}^K] \right\}. \quad (13.47)$$

Sklon argumentové charakteristiky je úměrný součtu imaginárních částí těch samých relativních citlivostí.

13.9 Kontrolní otázky z kapitoly 13

- 1) Definujte základní citlivosti. Uveďte alespoň čtyři pravidla pro výpočet relativních citlivostí.
- 2) Definujte víceparametrové souhrnné citlivosti.
- 3) Co jsou to citlivostní invarianty.
- 4) Jak vypočítáme citlivost racionálně lomené obvodové funkce? Co je to desenzibilace obvodu?
- 5) Jak vypočítáme citlivostní funkci modulu a argumentu obvodové funkce?
- 6) Vysvětlete použití a definici citlivosti parametrů pólů obvodu RLC 2. řádu.
- 7) Vysvětlete použití a definici citlivosti parametrů pólů obvodu ARC 2. řádu.
- 8) Vysvětlete použití a definici součinu zisku a citlivosti.

14 Toleranční analýza a syntéza obvodů

Cíle kapitoly: Seznámit se s principem a použitím toleranční analýzy a syntézy obvodů, s náhodným charakterem změn v obvodu, s pojmy provozní spolehlivost a výrobní výtěžnost.

14.1 Princip

Řeší chování obvodů při nedodržení nominálních hodnot parametrů prvků. Přesnou hodnotu parametru prvku většinou neznáme. Známe jen interval ve kterém tato hodnota leží. Parametry se navíc mění v čase. Je třeba znát:

- jak odchylky ovlivní výslednou funkci,
- jak velké tolerance prvků jsou přípustné.

Parametry prvků tvoří vektor $\vec{x}$. Nominální hodnoty parametrů označíme $\vec{x}^{(0)}$ a jejich odchylky Δx_i .

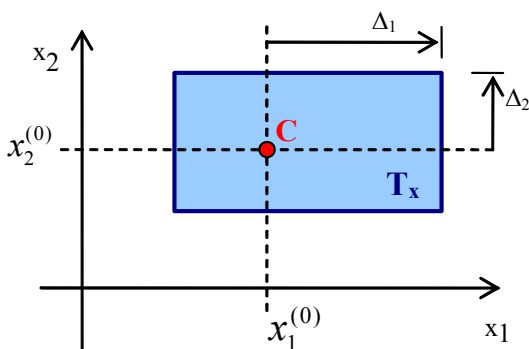
Odchylky vznikají:

- hodnota se přímo nekryje s vypočtenou,
- výběr ze sortimentní řady (např. z řady E 96),
- nepřesnost výroby-tolerance,
- stárnutí a zatěžování v provozu,
- vliv okolí (teploty, vlhkosti), mechanického namáhání, EM polí, radiace atd.

Při *toleranční analýze*, na základě znalostí odchylek parametrů prvků Δx_i , určujeme odchylku sledovaných obvodových funkcí nebo jinak definovaných vlastností obvodu (např. činitel jakosti Q , kmitočet pólu aj.), které obecně tvoří n -rozměrný vektor $\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$.

V prostoru parametrů prvků $\{x\}$ je tolerančními mezemi určena *toleranční oblast* $T_x: x_{di} \leq x_i \leq x_{hi}$, mající tvar r -rozměrného kvádru. Pro jednoduchý případ dvou parametrů je tato rovinná interpretace uvedena na **Obr. 119**. Často oblast T_x vymezujeme tolerančními intervaly určenými absolutními odchylkami od nominálních hodnot $[x_i^{(0)} - \Delta_{di}, x_i^{(0)} + \Delta_{hi}]$.

Většinou $\Delta_{di} = \Delta_{hi} = \Delta_i$ a T_x je souměrná. Při toleranční analýze zkoumáme zobrazení oblasti T_x z prostoru $\{x\}$ do prostoru $\{y\}$ na obraz T_y , který hodnotíme vzhledem k přípustné akceptovatelné oblasti A_y .



Obr. 119: Toleranční oblast v prostoru dvou parametrů.

Většinou při návrhu obvodů je potřebné řešit úlohu opačnou, nazývanou *toleranční syntézou*. Na základě dovolené odchylky vlastností $\Delta \vec{y}$ stanovujeme požadavky na tolerance jednotlivých prvků Δx_i , což musíme dát do souladu s ekonomickými a výrobními hledisky.

Při toleranční syntéze pracujeme naopak v prostoru parametrů $\{x\}$, kde zobrazíme přetransformovanou oblast akceptovatelných vlastností A_x a tu porovnáváme s toleranční oblastí T_x . Úkolem obvykle je odhadnout výtěžnost výroby (viz. dále).

Toleranční syntéza ve dvourozměrném prostoru parametrů $\{x_1, x_2\}$ je ukázána na **Obr. 120**. Příznivý případ je na **Obr. 120a**, kdy oblast T_x leží celá uvnitř akceptovatelné oblasti A_x . Tolerance součástek zcela vyhovují zadaným vlastnostem obvodu, výtěžnost výroby bude 100 %. Na **Obr. 120b** je případ, kdy jen část oblasti T_x leží uvnitř A_x . Tehdy některé součástky budou mít i takové hodnoty, kdy obvod nebude vykazovat požadované vlastnosti. Výtěžnost výroby bude tedy nižší. Každá realizace obvodu představuje v prostoru parametrů bod. Skutečná výrobní výtěžnost je jiná než odhadovaná.

Pro složitější obvody je přesná toleranční analýza nebo syntéza neproveditelná. Analytické řešení je většinou možné jen u elementárních úloh. Hranice oblasti A_F se nemusí jednoznačně transformovat na hranici obrazu A_x . Nutno je použít přibližné numerické metody a vzít na pomoc počítač.

Příklad 14.1 Toleranční syntéza děliče proudu.

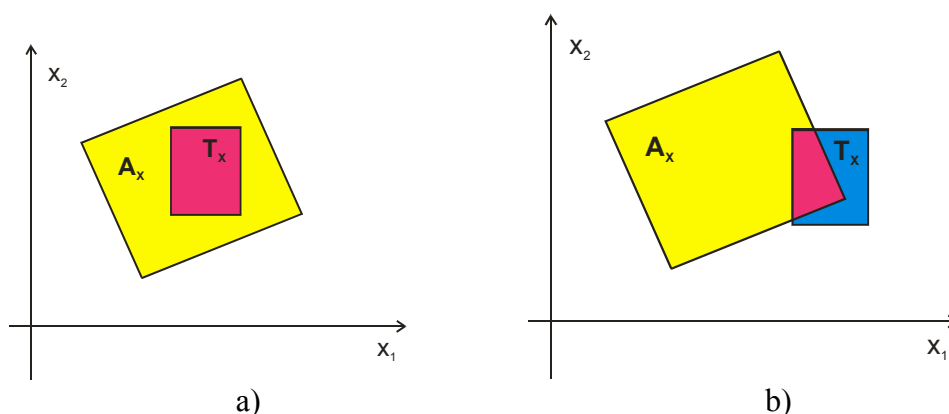
Na **Obr. 121a** je dán odporový dělič proudu $i_{imp} = 10 \text{ mA}$. V prostoru parametrů $x = \{G_1, G_2\}$ stanovte obraz akceptovatelné oblasti A_x , jsou-li definovány hranice výstupního proudu (y_1) a vstupní vodivosti obvodu (y_2) (definice požadovaných vlastností obvodu):

$$\begin{aligned} y_1 : \quad & 4,5 \text{ mA} < i_{imp} < 5,5 \text{ mA}, & (a) \\ y_2 : \quad & 80 \text{ mS} < G_{imp} < 120 \text{ mS}. & (b) \end{aligned} \quad (14.1)$$

Rozhodněte zda obvod se specifikami

$$\begin{aligned} x_1 : \quad & G_1 = G_2 = 30 \text{ mS}, & (a) \\ x_2 : \quad & G_1 = 20 \text{ mS}, \quad G_2 = 40 \text{ mS}, & (b) \end{aligned} \quad (14.2)$$

vyhovují stanoveným podmínkám (14.1).



Obr. 120: Toleranční syntéza ve dvourozměrném prostoru parametrů.

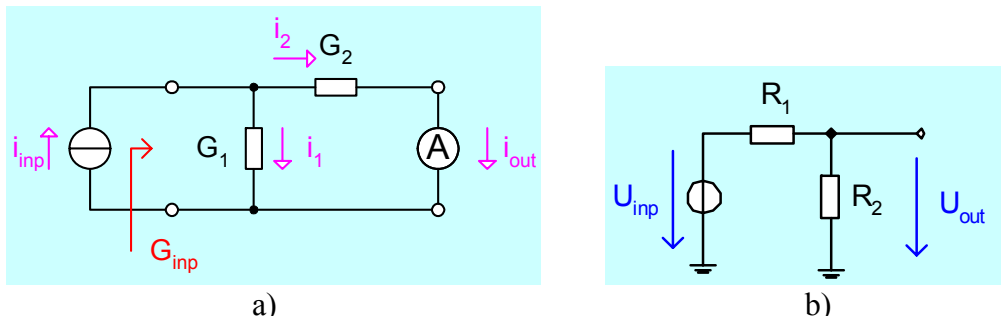
- a) tolerance součástek vyhovují zadaným vlastnostem obvodu,
- b) tolerance součástek jen z části vyhovují zadaným vlastnostem obvodu.

Příklad 14.2 Toleranční syntéza děliče napětí.

Proveďte toleranční syntézu (určete možné tolerance odporů) u jednoduchého odporového děliče na **Obr. 121b**, pro dosažení níže uvedených vlastností. Hodnoty součástek $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$. Jako požadované charakteristické vlastnosti jsou zadány:

- a) přenos napětí při výstupu naprázdno (y_1) (14.3),
 b) vstupní impedance při výstupu naprázdno (y_2) (14.3)

$$y_1 \equiv K_u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (a) \quad y_2 \equiv Z_{inp} = R_1 + R_2. \quad (b) \quad (14.3)$$



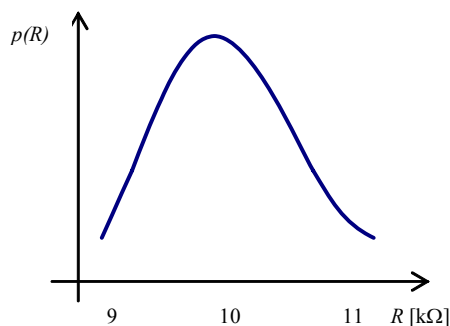
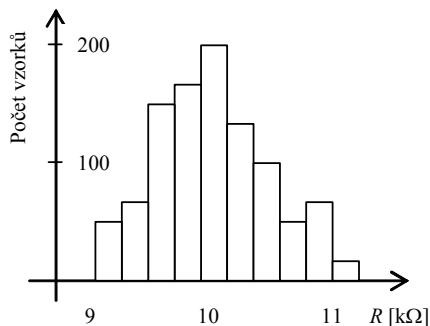
Obr. 121: Jednoduchý dělič proudu (a) a dělič napětí (b).

Za akceptovatelné budou brány obvody, pro které platí oblast A_y :

$$\begin{aligned} y_1: \quad & 0,49 < K_u < 0,51, \quad (a) \\ y_2: \quad & 1,8 \text{ k}\Omega < Z_{inp} < 2,2 \text{ k}\Omega. \quad (b) \end{aligned} \quad (14.4)$$

14.2 Náhodný charakter parametrů prvků

Parametry prvků stejného typu se kus od kusu liší, což zapříčinil výrobní rozptyl. Skutečnou hodnotu prvku dopředu přesně neznáme, má náhodný charakter. Z matematického hlediska jsou parametry spojité náhodné veličiny.



Obr. 122: Histogram hodnoty rezistorů.

Obr. 123: Rozložení pravděpodobnosti hodnoty R .

Výsledek měření hodnoty rezistorů (10 kΩ) z velké nenarušené výrobní série (1000 kusů) lze znázornit histogramem na **Obr. 122**. K sestrojení histogramu je interval výskytu náhodné veličiny (R) rozdělen na podintervaly – třídy. Pro každou třídu se určí četnost výskytu a zobrazí se jako výška sloupce. Místo absolutní četnosti můžeme použít četnost relativní. Pro nekonečně velký soubor hodnot histogram přejde ve spojitou funkci – rozložení hustoty pravděpodobnosti (**Obr. 123**).

Stručně si zopakujme matematický popis náhodných veličin. Pro hustotu pravděpodobnosti $p(x)$ platí:

$$p(x) \geq 0, \quad (a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (b) \quad P\{a \leq x \leq b\} = \int_a^b p(x) dx = 1. \quad (c) \quad (14.5)$$

Charakteristiky náhodné veličiny jsou střední hodnota (μ) a rozptyl (σ)

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \quad (a) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx. \quad (b) \quad (14.6)$$

Při zpracování konečného počtu (N) dat pracujeme s jejich statistickými ekvivalenty střední hodnota výběru ($\bar{x}$) a statistický rozptyl (s^2)

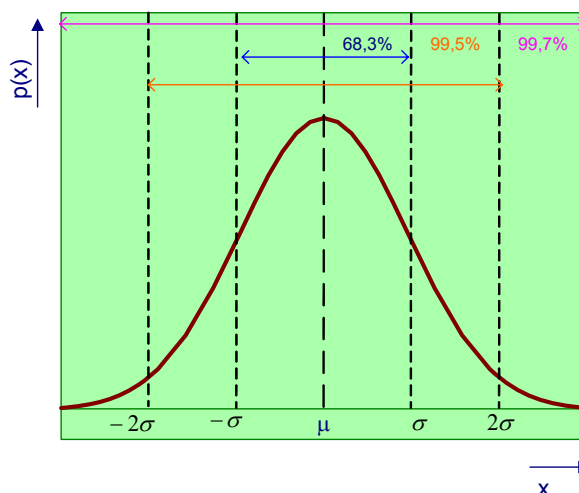
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (a) \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (b) \quad (14.7)$$

Hodnoty $\bar{x}$ a s^2 jsou odhadem parametrů μ a σ . Čím je rozptyl menší, tím je křivka $p(x)$ užší.

Náhodný proces výroby součástek, kde se uplatňuje mnoho faktorů s relativně malým individuálním vlivem (bez měření a roztřídování) má hustota pravděpodobnosti normální (Gaussovo) rozložení popsané vztahem

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (14.8)$$

Toto rozložení (**Obr. 124**) je také typické pro prvky integrovaných obvodů. U diskretních součástek však může být i jiné (**Obr. 125**). Pro technickou praxi je vhodné znát pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny v intervalech násobků $n\sigma$, tak jak je uvedeno na **Obr. 124**. V intervalu $\pm 3\sigma$ leží náhodná veličina x s pravděpodobností 99,7 %.



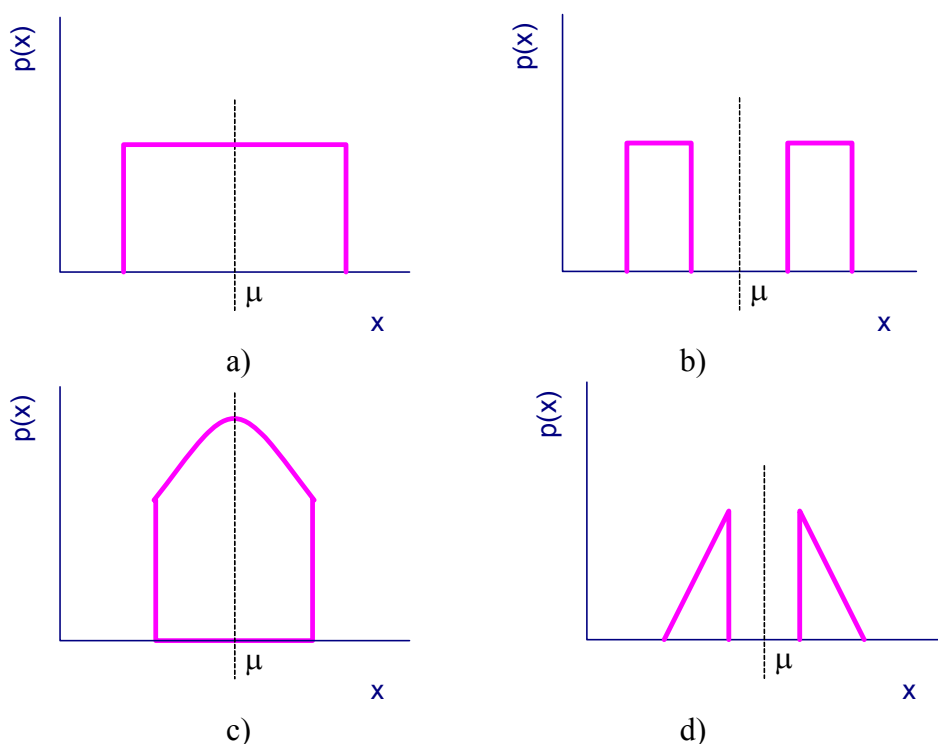
Obr. 124: Gaussovo rozložení hustoty pravděpodobnosti.

Jestliže ve výrobě je určující jeden faktor a nebo provedeme-li na závěr měření a roztřídování součástek (což je zcela běžné), pak používáme jiná rozložení. U diskretních součástek velmi často rovnoměrné rozložení na **Obr. 125a**. Díky výběru a rozčlenění do skupin dle přesnosti je nutno použít bimodální rovnoměrné rozložení (**Obr. 125b**) nebo bimodální trojúhelníkové (**Obr. 125d**). Například rezistory prodávané v 1% třídě mohou mít rovnoměrné rozložení (**Obr. 125a**), kdežto 5% třída bude mít rozložení bimodální

trojúhelníkové (**Obr. 125d**), protože v ní chybí rezistory vybrané do přesnější třídy. Z uvedených důvodů je také v praxi častější než teoretické (úplné) omezené (oříznuté) Gaussovo rozložení, jak je naznačeno na **Obr. 125c**.

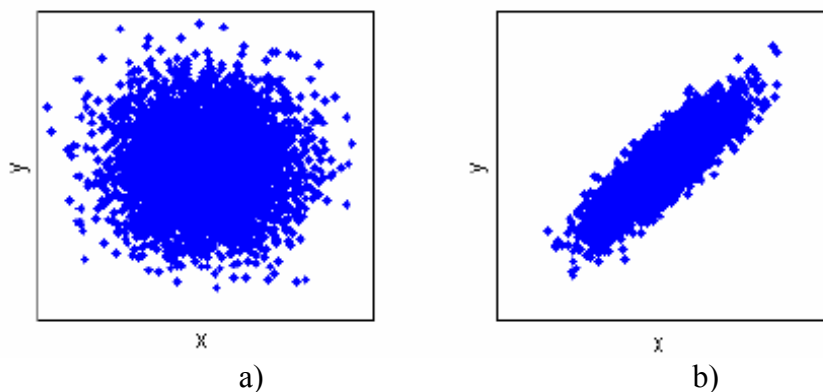
V případech integrovaných obvodů, stejně vyrobené a blízko sebe umístěné prvky, ve stejném prostředí (stejná teplota), vykazují velmi podobné odchylky hodnot a náhodné veličiny popisující parametry jsou korelované (**Obr. 126**). Je zde typické, že se parametry stejných sousedních prvků liší jen o jednotky, kdežto mezi prvky v různých čípech i o desítky procent.

Tuto možnost dvojí tolerance umožňuje zadávat i obvodový simulátor PSpice. Např. β v modelu tranzistoru: `.model BC337 NPN (BF=200, DEV=5%, LOT=20%)`. V simulátoru je i možnost zavedení korelací. Mírou korelace je *kolerační koeficient*



Obr. 125: Další typické rozložení hustoty pravděpodobnosti.

a) rovnoměrné, b) bimodální rovnoměrné, c) oříznuté Gaussovo, d) bimodální trojúhelníkové.



Obr. 126: Dvě náhodné veličiny s normálním rozložením

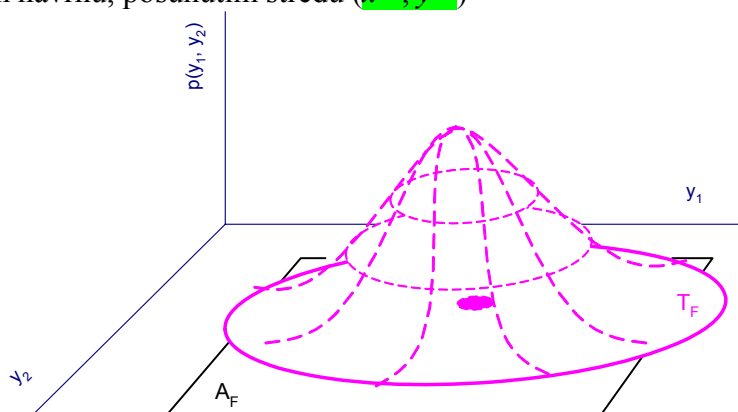
a) nekorelované ($\rho = 0$), b) korelované ($\rho = 0,7$).

$$\rho_{xy} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}, \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1. \quad (14.9)$$

Výtěžnost výroby obvodu je statistická míra, která reprezentuje procento realizací obvodu, které vyhovují zadaným vlastnostem tj. leží uvnitř akceptovatelné oblasti A_F . Většinou jde o poměr obvodů vyhovujících, k celkovému počtu vyrobených.

Zvýšení výtěžnosti je možné následujícími opatřeními:

- snížením tolerancí prvků, zúžením tolerančního intervalu $\langle x_d, x_h \rangle$ parametru x ,
- zmenšením citlivosti, změnou závislosti $y = f(x)$,
- vystředěním návrhu, posunutím středu $(x^{(0)}, y^{(0)})$



Obr. 127: Vystředění tolerančního návrhu.

Z ekonomického hlediska je nejméně vhodný první způsob (a), kdy musíme zaplatit výběr součástek s menší tolerancí. Středění návrhu (**Obr. 127**) umožňuje použít nejvyšší tolerance prvků při zachování výtěžnosti nebo maximalizovat výtěžnost pro dané tolerance. Poznamenejme, že pro nesymetrické rozložení se návrhový střed nekryje s nominální hodnotou parametru.

Provozní spolehlivost obvodu je dána pravděpodobností, že funkce obvodu zůstane vyhovující v určitém časovém intervalu, při splnění určitých provozních podmínek a pokud parametry součástek zůstanou v předpokládaných tolerančních mezích.

14.3 Kontrolní otázky z kapitoly 14

- 1) Vysvětlíte princip toleranční analýzy obvodů.
- 2) Vysvětlíte princip toleranční syntézy obvodů.
- 3) Jak popisujeme náhodný charakter změn parametrů obvodových prvků.
- 4) Uveďte typická rozložení hustoty pravděpodobnosti výskytu hodnot součástek obvodů.
- 5) Vysvětlíte pojmy: tolerance, toleranční oblast, akceptovatelná oblast, provozní spolehlivost, výrobní výtěžnost.
- 6) Jak se liší náhodný proces výroby integrovaných obvodů od výroby diskretních součástek?
- 7) Jak je definována výtěžnost výroby součástek obvodů a jak se dá zvýšit?

15 Analýza šumu v elektronických obvodech

Cíle kapitoly: Seznámit se s popisem, základními pojmy a modelováním různých druhů šumu v elektronických obvodech, s vhodnými šumovými modely operačního zesilovače, bipolárního a unipolárního tranzistoru.

15.1 Šum v elektronických obvodech.

Pod pojmem šumu se v obecném smyslu rozumějí jakékoliv náhodné signály, které narušují zpracování a přenos užitečných signálů. V první řadě rozlišujeme šumy:

- a) externí (mimo obvod),
- b) vlastní - interní (uvnitř obvodu).

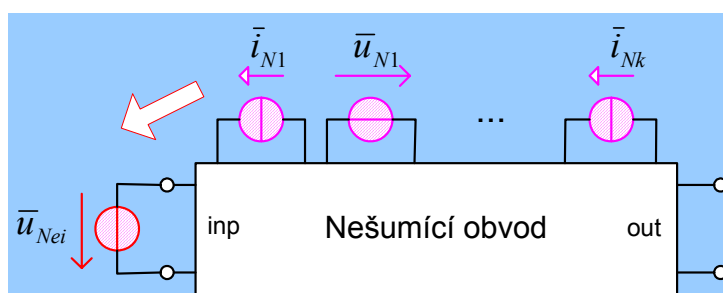
Různé *typy vlastních šumů* se pak liší fyzikálními příčinami svého vzniku. Nejčastěji se v současných obvodech setkáme se šumem *tepelným*, *výstřelkovým* a *blikavým*. V určitých konkrétních aplikacích jsou však výrazné i další typy šumů (praskavý, rekombinační, lavinovitý, rozdělovací aj.).

V elektronických obvodech se uplatňují dva druhy šumů (dle charakteru kmitočtové závislosti):

1. *Bílé šumy*, mají spektrum rovnoměrně rozloženo (tepelný a výstřelkový šum).
2. *Barevné šumy*, jejichž spektrum není rovnoměrně rozloženo. Např.: růžový (blikavý) šum (s kmitočtovou závislostí $1/f$).

Šumová analýza je nezbytná pro optimalizaci šumového chování obvodu (potlačení tohoto jevu). Z důvodu náhodného charakteru se k popisu šumu nejčastěji používá *středních šumových výkonů*, případně *středních kvadrátů napětí nebo proudů*, které šumový výkon určují. Při analýze musíme nějak podchytit proměnlivost šumového výkonu (napětí a proudu) při změně kmitočtového pásma. Proto byl zaveden pojem *šumová spektrální hustota* výkonu (napětí a proudu), která je vztažena na šířku pásma 1 Hz. Budeme ji značit malým písmenem.

Vhodným nástrojem k analýze šumu v daném obvodu bude *šumový model* (**Obr. 128**). V obvodu vyskytující se šumy v něm modelujeme šumovými zdroji proudu a napětí a to uvnitř obvodu na místě kde šum vzniká nebo je přetransformujeme (přepočítáme) na *ekvivalentní zdroje šumu* umístěné na vstupu nešumícího obvodu. Pro odlišení budeme pro zdroje šumu používat vyšrafované (barevné) značky.



Obr. 128: Šumový model obvodu.

15.1.1 Tepelný šum rezistoru

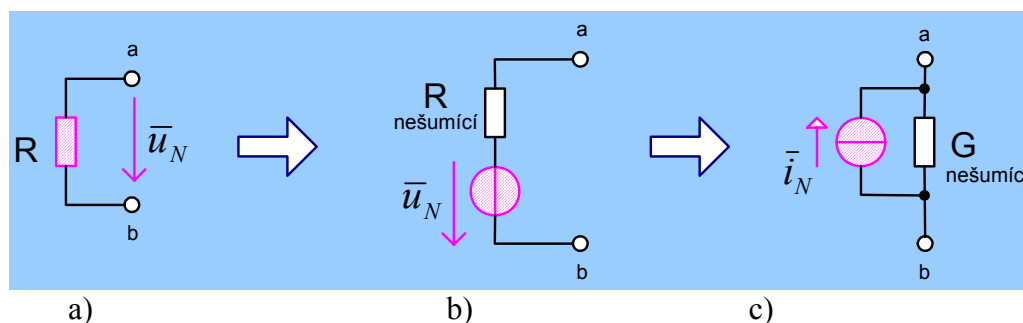
Tepelný (termický) šum (Johnsonův) je generován ve všech součástkách obsahujících volné elektrony (ve vodičích i polovodičích), v důsledku jejich náhodného pohybu, při libovolné teplotě vyšší než absolutní 0 K . Nejprve si však všimneme *šumu samotného rezistoru*.

Střední kvadrát tepelného šumového napětí rezistoru je dán vztahem

$$\overline{U_T^2} = 4kTRB_N, \quad (15.1)$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ [J/K] je Boltzmannova konstanta,
 T je absolutní teplota rezistoru v Kelvinech,
 R je odpor rezistoru [Ω],
 B_N je tzv. šumová šířka pásma (není totožná s pásmem B přenášených signálů, viz kap. 15.3.1).

Reálný „šumící“ rezistor R (Obr. 129a) můžeme nahradit modelem obsahujícím ideální „nešumící“ rezistor v sérii se zdrojem šumového napětí (Obr. 129b). Použít můžeme i proudový Nortonův ekvivalent tohoto modelu na Obr. 129c. Pro odlišení budeme pro zdroje šumu používat vyšrafované (barevné) značky.



Obr. 129: Model reálného šumícího rezistoru.

Připojíme-li k modelu s napětěovým zdrojem šumu (Obr. 129b) přizpůsobenou zátěž ($R_L = R$), pak pro tento nejhorší případ maximálního šumového výkonu na zátěži platí

$$P_T = \frac{\overline{U_T^2}}{4R_L} = \frac{4kTB_N R}{4R_L} = kTB_N. \quad (15.2)$$

Vidíme, že maximální šumový výkon dodaný do připojeného obvodu ze šumícího rezistoru na velikosti jeho odporu vůbec nezávisí.

Spektrální hustota výkonu tepelného šumu je

$$p_T(f) = \frac{P_T}{B_N} = \frac{4kTB_N}{B_N} = kT = konst. \quad (15.3)$$

konstantní v celém kmitočtovém rozsahu od 0 do ∞ . Tepelný šum má tedy charakter *bílého šumu*. Poznamenejme, že u reálné součástky R má šum spektrální výkonovou hustotu konstantní do vysokých kmitočtů řádově 10^{13} Hz, ta pak začíná stoupat vlivem dalších typů šumu. Uhlíkové i metalizované rezistory jsou navíc výrazným zdrojem „napětěového“ šumu, který mnohonásobně převyšuje šum tepelný.

Příklad 15.1 Tepelný šum rezistoru.

Vypočítejte hodnotu napětí tepelného šumu v rezistoru $R = 100 \text{ k}\Omega$ v kmitočtovém pásmu audio (20 Hz až 20 kHz), při teplotě 25°C (298 K).

Výsledek: $U_T = 5,73 \text{ }\mu\text{V}$.

15.1.2 Tepelný šum u obecné impedance

V obvodech je důležitý tepelný šum reálných rezistivních částí všech druhů imitací. Pro střední kvadratickou hodnotu tepelného šumového napětí v malém kmitočtovém intervalu Δf platí vztah

$$\overline{U_T^2} = 4kTR(f)\Delta f, \quad (15.4)$$

kde $R(f)$ je rezistivní složka impedance $Z(f)$ v $[\Omega]$. Protože tato reálná složka je funkcí kmitočtu, bude i šumové napětí kmitočtově závislé. Pro spektrální hustotu šumového napětí můžeme psát obdobně

$$\bar{u}_T^2 = 4kTR(f) . \quad (15.5)$$

Integrací tohoto vztahu přes celý kmitočtový rozsah dostaneme celkovou (středně kvadratickou) hodnotu šumového napětí

$$\bar{U}_T^2 = 4kT \int_0^\infty R(f) df . \quad (15.6)$$

Pro nalezení šumového napětí tedy nejprve určíme celkovou impedanci obvodu a její reálnou rezistivní složku $R(f)$, kterou pak dle vztahu (15.6) integrujeme.

Příklad 15.2 Tepelný šum obvodu RC.

S užitím vztahu (15.6) určete hodnotu tepelného šumu na výstupu jednoduchého obvodu tvořeného paralelním spojením rezistoru a kapacitoru.

Jiný ekvivalentní způsob nalezení šumového napětí je založen na šumovém modelu obvodu. Pro jednoduchost předpokládejme, že v lineárním (třeba i aktivním) obvodě je pouze jeden šumící rezistor. Ten vyčleníme na vstup přenosového článku, tvořeného zbytkem obvodu, s přenosovou funkcí výkonů $G(s)$ resp. jejího kmitočtově závislého modulu $G(f)$. Místo přenosu výkonů můžeme jednodušeji určit přenos napětí, kdy

$$G(f) = |K_u(f)|^2 = \left| \frac{\bar{U}_O}{\bar{U}_N} \right|^2 . \quad (15.7)$$

Pak celkový šum na výstupu obvodu (středně kvadratická hodnota šumového napětí) je dán vztahem

$$\bar{U}_O^2 = \int_0^\infty 4kTRG(f) df . \quad (15.8)$$

Protože v tomto případě R není funkcí kmitočtu můžeme vzorec (15.8) přepsat do tvaru

$$\bar{U}_O^2 = 4kTR \int_0^\infty G(f) df . \quad (15.9)$$

Porovnáním (15.9) se vztahem (15.1) vidíme, že integrál $G(f)$ zde určuje šumovou šířku pásma.

Příklad 15.3 Tepelný šum obvodu RC.

S užitím šumového modelu a vztahu (15.9) určete hodnotu tepelného šumu na výstupu jednoduchého obvodu tvořeného paralelním spojením rezistoru a kapacitoru. Výsledek porovnejte s předchozím příkladem.

Výsledek řešení:

V obou příkladech vyjde stejná hodnota tepelného šumu na výstupu daná vztahem $\bar{U}_T^2 = \frac{kT}{C}$.

15.1.3 Výšřelový šum

Vyskytuje se u všech součástek, kde se využívá přechodu PN. Vzniká v důsledku toho, že nosiče náboje vznikají a rekombinují na přechodu nespojitě - po kvantech. Tento typ má také charakter *bílého šumu* (konstantní spektrální výkonovou hustotu). Podle Schottkyho je střední kvadrát výšřelkového šumového proudu určen vztahem

$$\bar{I}_V^2 = 2qI_{DC}B_N, \quad (15.10)$$

kde $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ [C] je náboj elektronu,
 I_{DC} je stejnosměrný proud procházející PN přechodem,
 B_N je šumová šířka pásma.

Poznamenejme, že již při malém proudu I_{DC} přes přechod PN, převažuje zde výstřelkový šum nad termickým.

Model přechodu PN je tvořen proudovým zdrojem výstřelového šumu o hodnotě dané vztahem (15.10). Ten někdy bývá doplněn paralelně připojenou „nešumící“ efektivní vodivostí přechodu, která je přímo úměrná procházejícímu proudu I_{DC} .

15.1.4 Blikavý šum

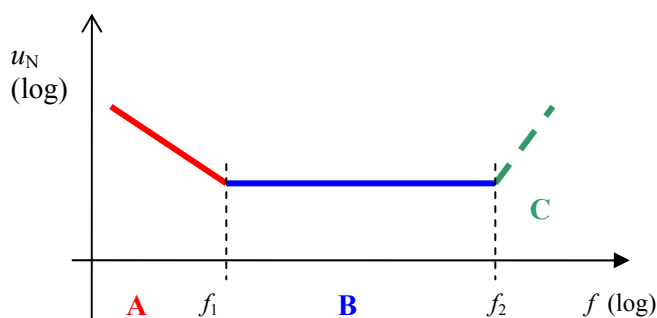
Blikavý (plápolavý, růžový) šum se vytváří v důsledku poruch krystalové mříže a nečistot v polovodiči. Projevuje se především na nižších kmitočtech. Jeho spektrální hustota výkonu klesá směrem k vyšším kmitočtům a to s kmitočtovou závislostí $1/f$ (proto se někdy také nazývá – šum $1/f$).

15.1.5 Kmitočtová závislost šumového výkonu

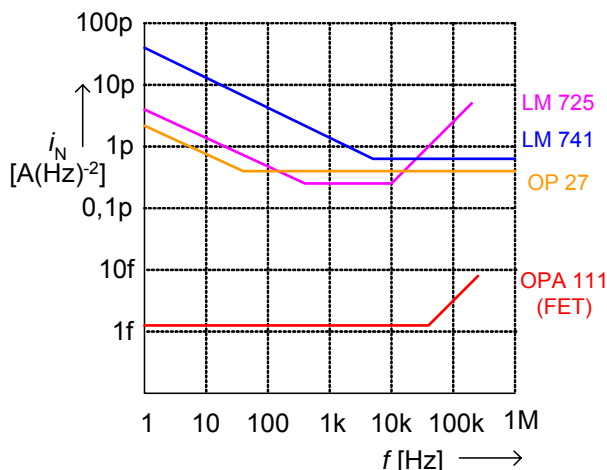
U většiny polovodičových součástek i integrovaných funkčních bloků se kmitočtová závislost šumové spektrální hustoty blíží typickému průběhu na **Obr. 130**. Vzniká spojením oblasti růžového (A) a bílého (B) šumu na lomovém kmitočtu (f_1). Většinou v oblasti (C), kde spektrální hustota narůstá, již daný blok neprovozujeme (má již nedostatečné zesílení) a proto výrobci tuto část ve svých konkrétních charakteristikách ani neuvádějí. Naopak u některých bloků, např. OZ s FETy, je málo výrazná nebo chybí oblast růžového šumu (A). Na **Obr. 131** jsou porovnány šumové vlastnosti několika různých operačních zesilovačů.

15.2 Šumové modely

Šumový model reálného rezistoru jsme uvedli na **Obr. 129**. Obdobně modelujeme i další součástky respektive celé bloky. Ukážeme si některé z nich.



Obr. 130: Charakteristický průběh kmitočtové závislosti spektrální šumové hustoty.

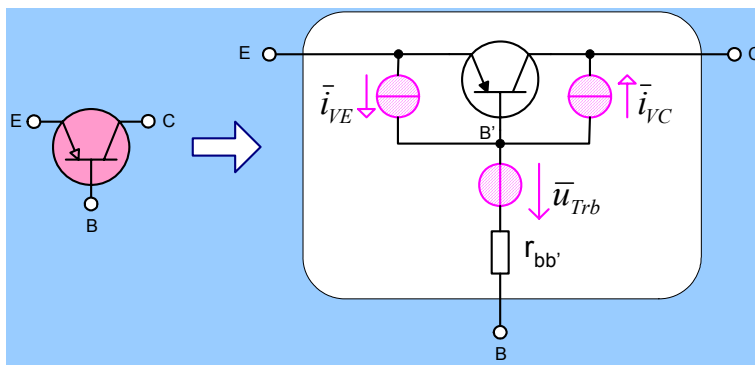


Obr. 131: Porovnání šumových vlastností vybraných operačních zesilovačů.

15.2.1 Šumový model bipolárního tranzistoru

Šumový model bipolárního tranzistoru v zapojení SB je nakreslen na **Obr. 132**. Napěťový zdroj modeluje tepelný šum odporu $r_{BB'}$ (kap.15.1.1). Proudové zdroje i_{VE} a i_{VC} modelují výstřelové šumy přechodů B-C a B-E. U přesnějšího modelu je třeba navíc uvažovat i skutečnost, že šumové proudy i_{VE} a i_{VC} jsou vzájemně korelované, neboť příčinou jejich vzniku je přibližně stejný stejnosměrný proud ($I_E \approx I_C$). Stupeň korelace se vyjadřuje komplexním koeficientem korelace. Obdobným způsobem je možné sestavit šumový model pro zapojení SE. Ukážeme si ho v následujícím příkladu.

Pro získání co nejnižších hodnot šumu je vhodné, aby použitý tranzistor měl co nejmenší hodnotu $r_{BB'}$, co největší β při malém I_E a mezní kmitočet f_α alespoň desetkrát vyšší než je pracovní. Klidový DC proud kolektoru by měl mít optimální hodnotu. Při velké rostě totiž výstřelkový šum, pro malé klesá příliš β .



Obr. 132: Šumový model bipolárního tranzistoru v zapojení SB.

Příklad 15.4 Šumový model tranzistorové stupně SE.

Nakreslete jednoduchý šumový model základního tranzistorové stupně v zapojení SE (**Obr. 133a**). V modelu zanedbejte tepelný šum v tranzistoru na $r_{BB'}$ a šum rezistorů pro nastavení pracovního bodu v bázi. Uvažované šumové zdroje nahraďte ekvivalentními zdroji šumu umístěnými na vstup tranzistoru.

Řešení:

V prvním modelu na **Obr. 133b** uvažujeme výstřelkové šumy v obou přechodech a tepelný šum zatěžovacího rezistoru. Spektrální hustoty jednotlivých zdrojů jsou dány následujícími vztahy:

$$\bar{i}_{VB}^2 = 2qI_B, \quad (a) \quad \bar{i}_{VC}^2 = 2qI_C, \quad (b) \quad \bar{u}_{TR}^2 = 4kTR_C. \quad (c) \quad (15.11)$$

Jak jsme uvedli již v úvodu kap. 15.1 je vhodné šumové zdroje z kolektorového obvodu (**Obr. 133b**) přepočítat do vstupního obvodu báze (**Obr. 133c**). K tomu předpokládáme, že $r_{CE} \gg R_C$, pak výstupní šumové napětí, způsobené výstřelkovým šumem kolektorového přechodu bude

$$\bar{u}_{OVC}^2 = \bar{i}_{VC}^2 R_C^2. \quad (15.12)$$

Přenos napětí tohoto obvodu je přibližně dán známým vztahem

$$|K_u| = \left| \frac{U_o}{U_i} \right| = g_m R_C, \quad (15.13)$$

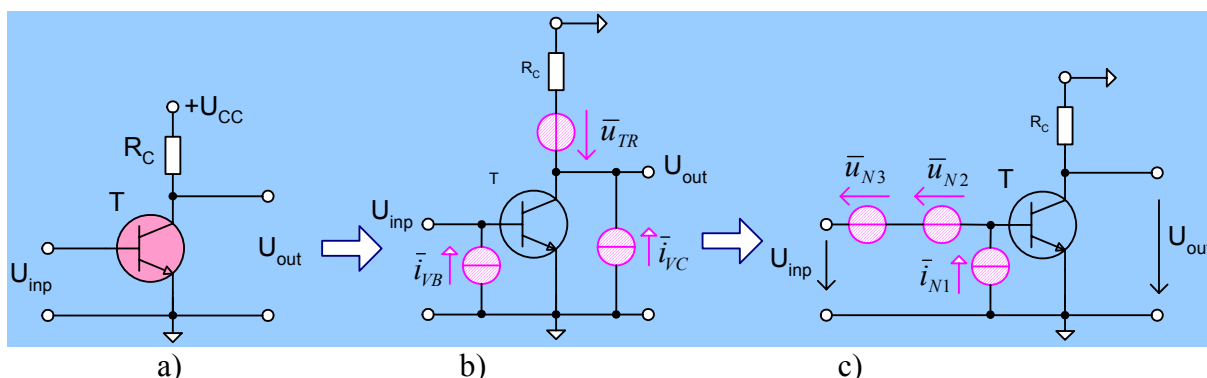
který platí i pro šумы. Na základě vztahu (15.13) lze šumová napětí z výstupu (15.11) a (15.12) přepočítat na vstup tranzistoru a určit tak šumové napětí ekvivalentních zdrojů na **Obr. 133c**:

$$\bar{u}_2^2 = \frac{\bar{i}_{VC}^2 R_L^2}{g_m^2 R_L^2} = \frac{\bar{i}_{VC}^2}{g_m^2}, \quad (a) \quad \bar{u}_3^2 = \frac{4kTR_L}{g_m^2 R_L^2} = \frac{4kT}{g_m^2 R_L}. \quad (b) \quad (15.14)$$

Proudový zdroj modeluje výstřelkový šum přechodu báze

$$\bar{i}_{N1}^2 = \bar{i}_{VB}^2 = 2qI_B. \quad (15.15)$$

Obvykle $\bar{u}_3 \ll \bar{u}_2$ a tento šumový zdroj můžeme zanedbat.



Obr. 133: Šumový model základního tranzistorového stupně v zapojení SE.

Příklad 15.5 Šumové napětí na výstupu tranzistorového stupně SE.

Pro základní tranzistorový stupeň SE na **Obr. 133a** nakreslete rezistivní lineární model (pro pásmo středních kmitočtů). Tranzistor nahraďte ekvivalentním obvodem dle **Obr. 22**. Obvod doplňte zdroji šumu a vypočítejte v symbolickém tvaru šumové napětí na výstupu.

15.2.2 Šumový model unipolárního tranzistoru

Šumové vlastnosti FET jsou příznivější než u BJT. Nejdůležitějšími zdroji šumu, které určují jeho šumové parametry jsou:

- *tepelný šum kanálu*, vznikající na činné složce impedance kanálu, je daný vztahem

$$\bar{I}_D^2 = 4kTB_N g_m \delta, \quad (15.16)$$

kde

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ [J/K] je Boltzmannova konstanta,

T je absolutní teplota v Kelvinech,

B_N je tzv. šumová šířka pásma,

g_m je přenosová vodivost tranzistoru (na nízkých kmitočtech),

δ je koeficient závislý na stejnosměrných napětích tranzistoru ($0,5 \leq \delta \leq 0,7$), určuje šumové vlastnosti FETu v pásmu středních kmitočtů,

- indukovaný šum hradla, který se přenáší z kanálu na hradlo (přes kapacitu C_{GS}), je

$$\bar{I}_G^2 = 4kTB_N \frac{\omega^2 C_{GS}}{g_m} \lambda, \quad (15.17)$$

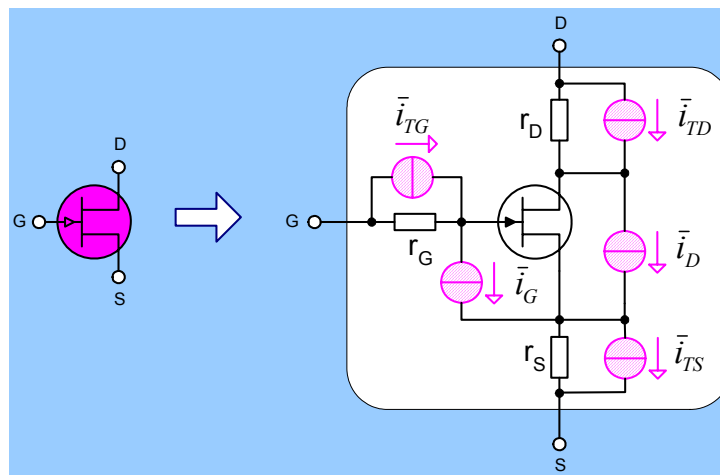
kde

λ je koeficient závislý na stejnosměrných napětích tranzistoru ($0,1 \leq \lambda \leq 0,3$), s předchozím šumem je korelovaný, projevuje se v pásmu vyšších kmitočtů a s kmitočtem roste,

- tepelné šumy parazitních odporů (r_G, r_S, r_D), kdy každý z nich modelujeme zdrojem tepelného šumu

$$\bar{I}_{Tr}^2 = 4kTB_N r. \quad (15.18)$$

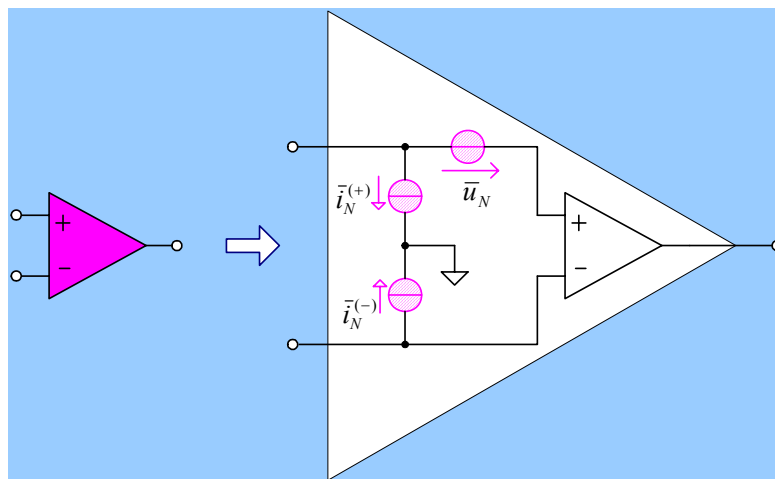
Méně důležitý je kmitočtově nezávislý *výstřelový šum hradla*, který je daný vztahem (15.10). Lze jej zanedbat především u tranzistorů MOS. Obecný šumový model všech unipolárních tranzistorů je nakreslený na **Obr. 134**. Obsahuje pět proudových zdrojů modelujících uvedené šumy. Tak jako u bipolárního tranzistoru můžeme i zde tyto zdroje přepočítat na ekvivalentní zdroje šumu umístěné na vstupu tranzistoru.



Obr. 134: Šumový model unipolárního tranzistoru.

15.2.3 Šumový model operačního zesilovače

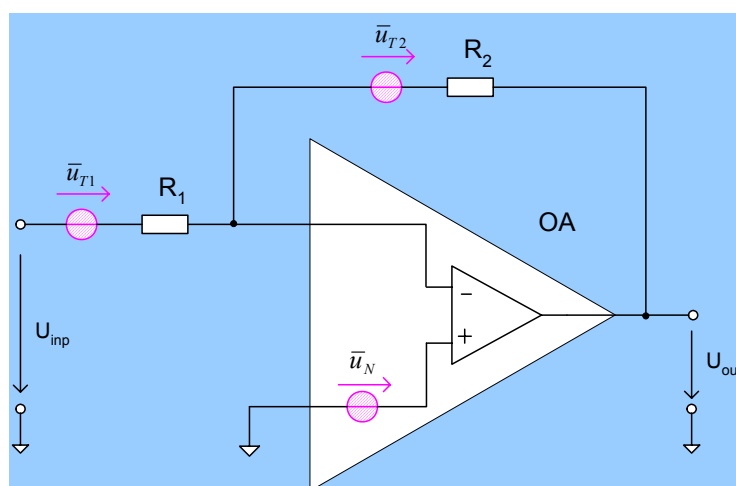
Šumový model reálného OZ je na **Obr. 135**. Obsahuje ideální „nešumící“ OZ a tři nekorelované zdroje šumu (dva proudové a jeden napěťový), které postihují veškeré šumy uvnitř bloku. Tyto ekvivalentní šumové veličiny se dají vhodně měřit a udává je výrobce. Uvedený model je podobný modelu reálného OZ, postihující offset. V konkrétním zapojení OZ můžeme šumový model na **Obr. 135** zjednodušit a tyto tři zdroje nahradit jedním ekvivalentním. U OZ s unipolárními tranzistory na vstupu lze proudové šumové zdroje zanedbat. To lze také učinit v případě buzení vstupů OZ z nízkoohmových zdrojů signálů.



Obr. 135: Šumový model reálného operačního zesilovače.

Příklad 15.6 Šumový model invertujícího zesilovače s OZ.

Nakreslete šumový model invertujícího zesilovače s OZ. Diskutujte jeho zjednodušení. Vypočítejte výstupní šumové napětí v symbolickém tvaru.



Obr. 136: Šumový model invertujícího zesilovače s OZ.

Řešení:

Šumový model invertujícího zesilovače s OZ je na obr. 9. Jsou v něm zdroje tepelného šumu obou rezistorů a ekvivalentní napěťový zdroj šumu OZ. Nejprve určíme přenosy napětí z jednotlivých zdrojů. Pak kvadrát šumového napětí na výstupu je na základě superpozice šumových výkonů dán následujícím vztahem:

$$\bar{U}_{ON}^2 = \bar{U}_N^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \bar{U}_{T1}^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \bar{U}_{T2}^2 (x)^2 . \quad (15.19)$$

15.3 Další šumové parametry

15.3.1 Šumová šířka pásma

V teorii obvodů se obvykle šířka přenášeného pásma definuje poklesem přenosu napětí (proudu) o **- 3 dB**, nebo-li na úroveň **0,707** maximální hodnoty. Pro pokles výkonového

přenosu na polovinu maximální hodnoty. Šumová šířka pásma je však definována jiným způsobem.

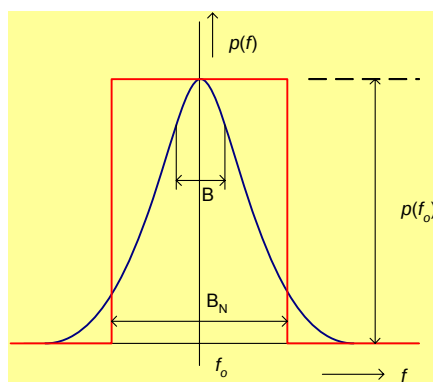
Předpokládejme, že na vstup selektivního obvodu (dvojbranu) přivádíme šumový signál s konstantní spektrální hustotou výkonu (bílý šum), potom na výstupu dostáváme tzv. *selektivní (barevný) šum*, jehož spektrální hustota výkonu nabývá maximální hodnoty na středním kmitočtu f_0 , tak, jak je naznačeno na **Obr. 137**. Šumová šířka pásma B_N se určí na základě rovnosti celkového šumového výkonu na výstupu obvodu a ekvivalentního šumového výkonu, který bychom získali na výstupu dvojbranu s ideální obdélníkovou přenosovou charakteristikou. Podle **Obr. 137** se plocha pod (modrou) křivkou $p(f)$ rovná ploše (červeného) obdélníka, tedy

$$\int_0^{\infty} p(f) df = p(f_0) B_N . \quad (15.20)$$

Na základě této rovnosti pak můžeme odvodit definiční vztah pro šumovou šířku pásma

$$B_N = \frac{1}{p(f_0)} \int_0^{\infty} p(f) df . \quad (15.21)$$

Z uvedené definice je zřejmé, že šumová šířka pásma B_N není totožná se šířkou pásma B pro pokles o -3 dB, nýbrž je větší, což nepřímo úměrně závisí na řádu selektivního obvodu. Pro řád $n = 2$ je $B_N = 1,57 B$, pro řád $n = 10$ je $B_N = 1,11 B$.



Obr. 137: K definici šumové šířky pásma.

15.3.2 Šumové číslo

K popisu šumových vlastností lineárních obvodů je výhodné zavést šumové číslo (šumový činitel) F . K jeho definici zavedme výkonový poměr signálu a šumu na vstupu P_{Si}/P_{Ni} a na výstupu P_{So}/P_{No} . Aby byly výpočty jednoznačné přisudíme generátoru *normální teploty* $T_0 = 290 \text{ K}$. Šumové číslo je za těchto podmínek definováno vztahem

$$F = \frac{\frac{P_{Si}}{P_{Ni}}}{\frac{P_{So}}{P_{No}}} , \quad (a) \quad F_{dB} = 10 \log F \text{ [dB]} . \quad (b) \quad (15.22)$$

Vztah (15.22) udává, kolikrát se zhorší poměr signál/šum po průchodu signálu obvodem proti původní hodnotě P_{Si}/P_{Ni} za podmínky oboustranného výkonového přizpůsobení. Pokud by obvod sám neobsahoval žádné šumové zdroje, byl by čitatel i jmenovatel stejný a $F = 1$. Někdy vyjadřujeme šumové číslo v decibelech (15.22).

Ve většině praktických aplikací je obvod tvořen kaskádou několika (n) dvojbranů s šumovými čísly $F_1, F_2, \dots, F_n$ a výkonovým (dosažitelným) zesílením $A_{P1}, A_{P2}, \dots, A_{Pn}$. Výsledné šumové číslo této kaskády je určeno (Fireho) vztahem

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{A_{P1}} + \frac{F_3 - 1}{A_{P1}A_{P2}} + \dots + \frac{F_n - 1}{\prod_{i=1}^{n-1} A_{Pi}} . \quad (15.23)$$

Ze vztahu (15.23) je patrné, že nejvíce se uplatňuje první blok. Bude-li výkonový přenos A_{P1} dostatečně velký a šumové číslo F_1 dostatečně malé, bude i celkové šumové číslo F malé i při $F_2 \gg 1$. To je velmi závažný fakt pro konstrukci vstupních částí obvodových systémů (např. vstupních částí přijímačů).

15.3.3 Míra šumu

Protože celkové šumové číslo F nezávisí jen na samotných šumových číslech jednotlivých dvojbranů F_i , ale i na jejich dosažitelných výkonových přenosech A_{Pi} , byla zavedena tzv. míra šumu, a to definičním vztahem

$$M_i = \frac{F_i - 1}{1 - \frac{1}{A_{Pi}}} . \quad (15.24)$$

Nejčastěji se míra šumu používá pro stanovení pořadí jednotlivých bloků kaskády, kdy jednotlivé dvojbrany mají různá výkonová zesílení a různá šumová čísla. Má-li mít kaskádní zapojení nejmenší velikost F , musíme dvojbrany řadit postupně za sebou tak, aby na vstupu byl ten z nich, jehož míra šumu je nejmenší a další řadíme podle stoupající hodnoty jejich M .

15.3.4 Vlastní šumová teplota obvodu

U některých obvodů (např. pro zpracování signálů o vysokých kmitočtech) jsou typická velmi nízká šumová čísla ($F \rightarrow 1$). Pro tyto účely není proto tento parametr příliš výhodný. Výhodnější je vyjádřit šumové vlastnosti takového obvodu pomocí jeho tzv. vlastní šumové teploty, definované následujícím vztahem

$$T_v = (F - 1)T_0, \quad T_0 = 290 \text{ K}. \quad (15.25)$$

15.4 Kontrolní otázky z kapitoly 15

- 1) Jaké druhy šumu v elektronických obvodech znáte? Definujte a blíže rozeberte dva z nich.
- 2) Uveďte a rozeberte model reálného šumícího rezistoru a šum obecné impedance.
- 3) Uveďte a rozeberte šumový model bipolárního tranzistoru.
- 4) Uveďte a rozeberte šumový model unipolárního tranzistoru.
- 5) Uveďte a rozeberte šumový model operačního zesilovače.
- 6) Vysvětlete pojmy: šumové číslo, šumová teplota a šumová šířka pásma.

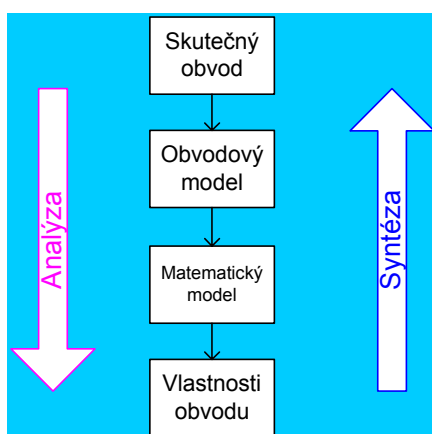
16 Základy syntézy obvodů

Cíle kapitoly: Seznámit se s principem syntézy a návrhu obvodů, s jejich vývojovými diagramy, se způsobem syntézy obvodů RLC rozkladem zadané imitance na řetězový zlomek a parciální zlomky, s definicí a vlastnostmi pozitivně reálné funkce, s rozložením nulových bodů a pólů u různých obvodů RLC.

16.1 Úvod do syntézy obvodů

Vývojové schéma řešení obvodu je na **Obr. 138**. Při **analýze** určujeme vlastnosti obvodu a jak jsme ukázali v předchozích kapitolách jde o jednoznačnou úlohu. Při správném obvodovém (resp. matematickém) modelu jsou výsledné vlastnosti obvodu při opakované analýze vždy shodné.

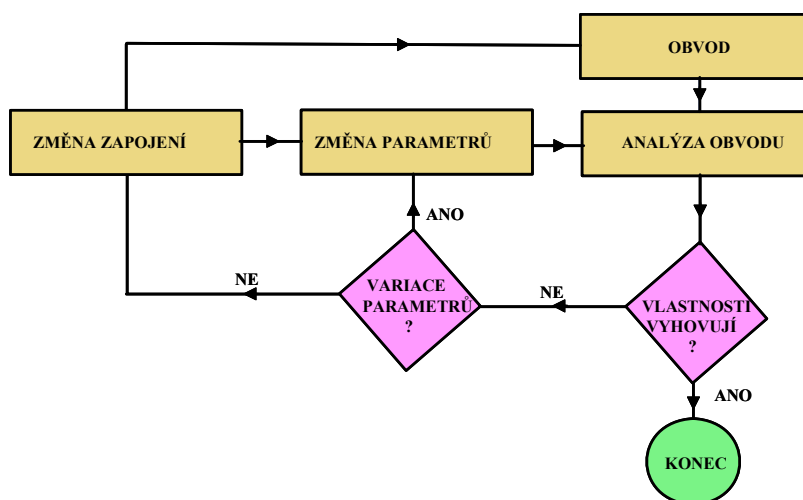
Opakem analýzy je **syntéza** obvodů (**Obr. 138**), kdy k zadaným vlastnostem hledáme vhodný obvod. Tento proces je víceznačná úloha. I při správném modelu výsledné obvody nemusí být shodné. Zadány mohou být: a) vlastnosti obvodu, b) obvodové funkce, c) parametry obvodu, d) toleranční pole. Hledáme: a) typ a strukturu obvodu (úplně neznámý obvod), b) parametry součástek (při čemž zapojení obvodu je již známo). Při syntéze obvodů využíváme již vzpomínané děje: a) aproximaci, b) idealizaci, c) optimalizaci. Rozlišujeme syntézu: a) přímou, b) nepřímou.



Obr. 138: Analýza a syntéza obvodů.

Návrh obvodů je širší proces, který vede k určení parametrů obvodu, již ověřené struktury. Provede se jeho analýza (v dnešní době, hlavně jde-li o větší obvod, na počítači). Posoudí se získané vlastnosti obvodu, zda-li vyhovují. Podle toho se proces ukončí nebo se variují parametry původního obvodu, popřípadě se celé zapojení změní. Možná je i modifikace a úprava daného obvodu (např. zavedení ZV). Navrhovatel (odborník) na základě znalostí, zkušeností a také intuice vybírá základní zapojení a jeho případnou změnu. Ostatní operace vykonává za pomoci počítače. Vývojový diagram návrhu obvodů je na **Obr. 139**. Vycházíme: a) ze známe struktury, ze schématu obvodu, b) z obvodových rovnic a funkcí, c) z empirických vztahů.

Při řešení se mohou vyskytnout následující nesnáze: a) zadání vede na neřešitelnou úlohu (soustavu rovnic), b) matematické řešení existuje, fyzikálně nebo technologicky však není realizovatelné. Musí být splněna podmínka: **požadované parametry $\leq$ stupně volnosti**.



Obr. 139: Vývojový diagram návrhu obvodů.

Vždy vycházíme jen z určitého modelu, ten musí postihovat všechny požadované souvislosti. Existují možnosti dodatečné korekce, snížení stupně idealizace, zahrnutí parazitních jevů.

16.2 Syntéza obvodů RLC

16.2.1 Imitanční funkce dvojpólů RLC

Nejprve si zopakujeme vlastnosti imitačních funkcí. Obecně je možné **imitanční funkci** psát v exponenciálním tvaru (3.7). Stejně dobře lze použít i zápis ve složkovém nebo jiném tvaru, odpovídajícímu konkrétnímu zapojení jednotlivých dílčích prvků.

Příklad 16.1 Sériový rezonanční obvod RLC.

Určete impedanci Z , v obecném symbolickém tvaru, rozložení pólů a nulových bodů pro jednoduchý sériový rezonanční obvod RLC.

Příklad 16.2 Sériově paralelní rezonanční obvod RLC.

Určete impedanci Z , v obecném symbolickém tvaru, rozložení pólů a nulových bodů pro sériově paralelní rezonanční obvod (R a L v sérii a C k nim paralelně).

Výsledky těchto příkladů se dají zobecnit v následující tvrzení, že imitační funkce libovolného dvojpólu RLC není jen racionálně lomená funkce (3.5) proměnné s , ale má speciální tvar.

Věta 16.1 **Bruneho** věta o imitační funkci dvojpólu RLC (1930).

Imitační funkce libovolného dvojpólu RLC je **pozitivně reálnou funkcí** (PRF), nebo tzv. *Bruneho funkcí*, která je určena dvěma základními vlastnostmi:

1. Pro reálné hodnoty s je PRF $F(s)$ také reálná.
2. Pro nezáporné reálné části proměnné s je také reálná část PRF $F(s)$ nezáporná, tj.

$$\operatorname{Im}\{s\} = 0 \rightarrow \operatorname{Im}\{\dot{F}(s)\} = 0, \quad (a) \quad \operatorname{Re}\{s\} \geq 0 \rightarrow \operatorname{Re}\{\dot{F}(s)\} \geq 0. \quad (b) \quad (16.1)$$

Imitanční funkce libovolného dvojpólu RLC má zřejmě vždy první vlastnost PRF, neboť všechny koeficienty u mocnin s v polynomech zlomku (3.5) jsou reálné. Důkaz o platnosti druhé podmínky je založen na tom, že dvojpól RLC je pasivní a nemůže trvale dodávat výkon do vnější zátěže. Pro syntézu pasivních dvojpólů je důležitá platnost opačného tvrzení, že každá PRF může být realizována jako imitanční funkce dvojpólu RLC.

Poznamenejme, že pro různé dvojpóly RLC, nulové body a póly imitanční funkce leží v komplexní rovině v obecné poloze. Mohou být buď **reálné** nebo **komplexně sdružené**. Při změně některého parametru obvodu se mění jejich poloha (nastává jejich **migrace**). Směr a rychlost této migrace naznačují, jaké jsou citlivostní vlastnosti daného dvojpólu.

16.2.2 Vlastnosti pozitivně reálných funkcí

Zejména pro účely syntézy je nutné umět zjistit, zda daná racionálně lomená funkce představuje PRF nebo naopak spolehlivě rozhodnout, že tomu tak není, aby se při syntéze již předem vyloučily nerealizovatelné výsledky. Definiční vztahy PRF (16.1) se totiž k testování pozitivní reálnosti bohužel příliš nehodí. Proto je pro rychlou orientaci výhodné znát některé další **typické vlastnosti PRF**, což jsou zejména tyto:

- 1) Nulové body a póly neleží v pravé polovině roviny s .
- 2) Nulové body na imaginární ose, jsou jednoduché a PRF v nich má reálnou a kladnou derivaci.
- 3) Póly na imaginární ose, jsou rovněž jednoduché a PRF v nich má reálná a kladná residua.
- 4) Nulové body a póly jsou buď komplexně sdružené nebo leží na reálné ose.
- 5) Stupeň polynomu v čitateli (m) a ve jmenovateli (n), tedy i počet nulových bodů a pólů, se u PRF liší nejvýše o jedničku, tj.:
a) $m = n - 1$, b) $m = n$, c) $m = n + 1$.
- 6) Reálná část PRF je pro $s = j\omega \geq 0$ nezáporná. Pro všechna ω platí
 $\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0$
- 7) Koeficienty a_n, b_m obou polynomů jsou vždy reálné nezáporné.

Uvedené vlastnosti určují test PRF. Pro ověření bodu (1), zda nulové body a póly leží v levé polorovině můžeme použít Hurwitzův test [6], nebo vhodný program na počítači.

Věta 16.2 *Druhá věta o pozitivně reálných funkcích.*

Jsou-li funkce $F_1(s)$ a $F_2(s)$ pozitivně reálné, pak jsou pozitivně reálné i funkce inverzní $(F_1(s))^{-1}$, složené $F_2(F_1(s))$ také součty a rozdíly funkcí $F_1(s) \pm F_2(s)$.

Příklad 16.3 *Ověření pozitivně reálné funkce.*

- a) Zakreslete do Gaussovy komplexní roviny s nulové body a póly funkce $Z(s)$

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1}{2s^2 + s + 1} \quad (16.2)$$

- b) Rozhodněte zda-li splňuje podmínku PRF.

c) Pomocí vhodného programu znázorněte plochu v rovině $Z(s)$ kam se transformuje daným vztahem pravá polorovina roviny s .

Příklad 16.4 *Ověření pozitivně reálné funkce.*

Zjistěte, zda-li funkce $F(s)$ splňuje podmínku (1) PRF - nulové body a póly neleží v pravé polovině Gaussovy roviny s .

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{30 + 4s + s^2 + s^3}{2 + 3s + s^2} \quad (16.3)$$

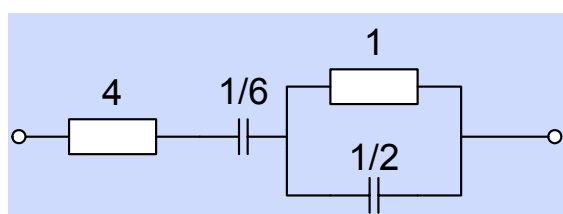
16.2.3 Imitanční funkce dvojpólů RC a RL

Příklad 16.5 *Imitanční funkce dvojpólů RC.*

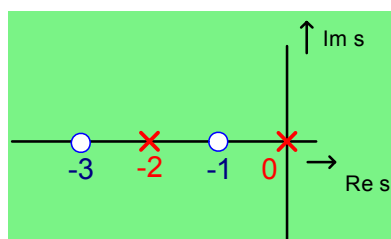
Pro dvojpól RC na **Obr. 140a** odvoďte imedanční funkci a rozložení pólů a nulových bodů.

Řešení:

Pro dvojpól RC znázorněný na **Obr. 140a** vychází imedanční funkce ve tvaru (16.4). Rozložením na kořenové činitele pak (16.4)



a)



b)

Obr. 140: Jednoduchý dvojpól RC.

a) schéma zapojení,

b) rozložení pólů a nulových bodů.

$$Z(s) = \frac{4s^2 + 16s + 12}{s^2 + 2s}, \quad (a) \quad Z(s) = 4 \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)}. \quad (b) \quad (16.4)$$

Nulové body a póly, odpovídající vztahu (16.4), jsou zobrazeny na **Obr. 140b**. Je zřejmé, že leží na záporné části reálné osy a že se nulové body navzájem střídají s póly. Dá se dokázat, že toto pravidlo platí obecně pro všechny dvojpóly RC a v mírně modifikované podobě také pro všechny dvojpóly RL [6].

16.2.4 Imitanční funkce dvojpólů LC

Příklad 16.6 *Imitanční funkce dvojpólů LC.*

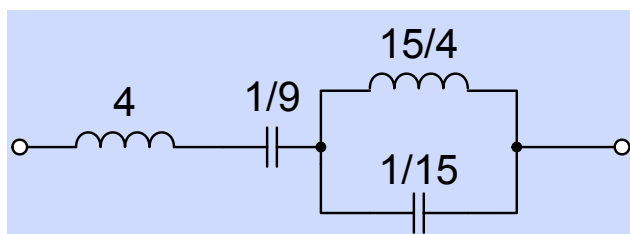
Pro dvojpól LC na **Obr. 141a** odvoďte imedanční funkci a rozložení pólů a nulových bodů.

Řešení:

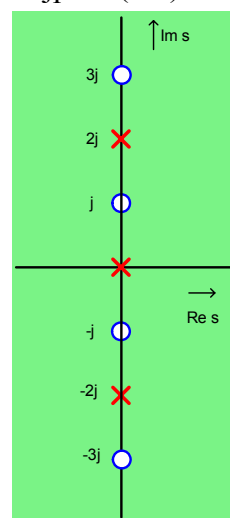
Pro jednoduchý dvojpól LC (tzv. reaktanční dvojpól) znázorněný na **Obr. 141a** vychází imedanční funkce ve tvaru (16.5) Rozložením na kořenové činitele pak (16.5)

$$Z(s) = \frac{4s^4 + 40s^2 + 36}{(s^2 + 4)s}, \quad (a) \quad Z(s) = 4 \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)}. \quad (b) \quad (16.5)$$

Nulové body a póly, odpovídající vztahu (16.5), jsou zobrazeny na **Obr. 141b**. Všechny leží na imaginární ose, jsou imaginárně sdružené. Opět se navzájem střídají nulové body a póly. Také v tomto případě se dá dokázat, že tento poznatek je možné zobecnit [6]. Tyto vlastnosti mají imitanci funkce všech reaktančních dvojpólů (LC).



a)



b)

Obr. 141: Jednoduchý dvojpól LC.

a) schéma zapojení,

b) rozložení pólů a nulových bodů.

16.2.5 Syntéza dvojpólů RLC

Úkolem syntézy je: a) najít strukturu obvodů, b) zjistit parametry jednotlivých prvků, pro předepsanou vlastnost nebo obvodovou funkci. Jak již uvedly (kap. 16.1) syntéza je mnohoznačná úloha, proto vybíráme určitý přístup a postup k řešení, zavádíme různá kritéria. Např. minimum všech prvků tvořící obvod, minimum hůře vyrobitelných a ekonomicky náročnějších prvků (např. L), minimum hodnot prvků (často souvisí s rozměry a vhodností pro integraci). Provádíme z určitého hlediska optimalizaci návrhu obvodu.

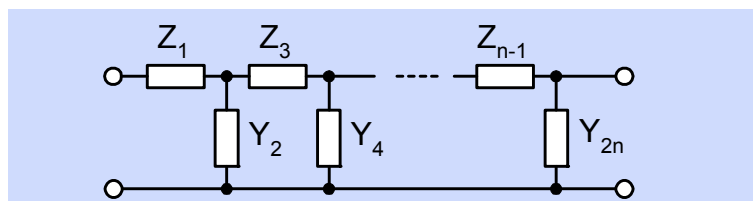
Z kapitoly 16.1 vyplývá, že postup syntézy se obecně dělí do dvou základních, ale vzájemně velmi úzce souvisejících kroků, tzv. **aproximace** (vyjádření nejrozumnějších požadavků na vlastnosti hledané soustavy vhodnými matematickými prostředky) a tzv. **realizace** (přesněji jde o syntézu obvodového modelu na základě výsledků prvního kroku). V případě syntézy dvojpólů RLC se v aproximačním kroku hledá taková imitanci funkce daného dvojpólu, která by byla zároveň PRF, v tzv. realizačním kroku pak jde o vhodný **rozklad PRF**, který by vedl k realizovatelným strukturám RLC, tj. aby dílčí racionální lomené funkce vyskytující se v tomto rozkladu byly také PRF. V této části se budeme zabývat pouze tímto druhým krokem a z mnoha existujících způsobů rozkladu PRF [6] uvedeme pouze dva základní typy, a to: a) rozklad dané PRF do tvaru **řetězového zlomku**, b) na **parciální zlomky**.

16.2.6 Rozklad pozitivně reálné funkce na řetězový zlomek

Do tvaru řetězového zlomku lze danou PRF upravit postupným dělením polynomů v čitateli a ve jmenovateli, přičemž (na rozdíl od ryze matematického postupu) po každém ukončeném kroku dělení musí zbytková racionální lomená funkce znovu představovat PRF. Pak se provede inverze této zbytkové PRF a v dalším kroku pokračuje její dělení tak dlouho, až obdržíme přímo „realizovatelnou“ zbytkovou PRF. Jako obecný příklad uveďme výsledný tvar řetězového zlomku pro impedanční funkci $Z(p)$, která má pak tvar

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Z_1(s) + \frac{1}{Y_2(s) + \frac{1}{Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \dots}}} \quad (16.6)$$

Snadno lze zjistit, že struktura složeného dvoj pólu odpovídajícího tomuto rozkladu představuje příčkový článek, jehož vstupní impedance je právě daná imedanční funkce $Z(p)$, přičemž se zde střídají podélné dílčí dvoj póly s impedancemi $Z_1(p), Z_3(p), \dots$ atd. a příčné dílčí dvoj póly s admitancemi $Y_2(p), Y_4(p), \dots$ atd. (**Obr. 142**). Aby bylo možné snadno realizovat jednotlivé dílčí impedance či admitance ve vztahu (16.6), budeme se samozřejmě snažit o to, aby tyto dílčí imitanční funkce byly co nejjednodušší a odpovídaly pokud možno elementárním imitancím podle **Tab. 10**.



Obr. 142: Příčkový článek dvoj pólu.

Tab. 10: Realizace elementárních imitancí.

Tvar dílčí funkce	Impedance $Z(p)$	Admitance $Y(p)$
A	Rezistor: $R = A$	Rezistor: $G = A$
sA	Induktor: $L = A$	Kapacitor: $C = A$
$\frac{1}{sA}$	Kapacitor: $C = A$	Induktor: $L = A$

Příklad 16.7 *Syntéza obvodu rozkladem PRF na řetězový zlomek.*

Je dána imedanční funkce dvoj pólu v následujícím symbolickém tvaru

$$Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{2s^3 + 4s} \quad (16.7)$$

Proveďte syntézu obvodu rozkladem dané PRF na řetězový zlomek.

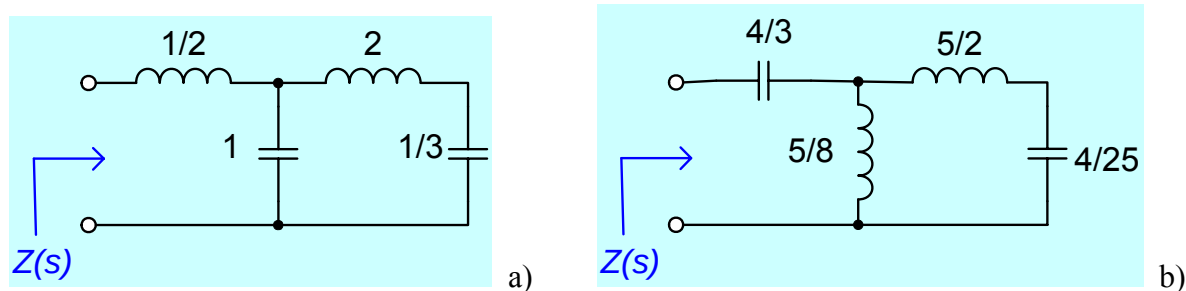
Řešení:

Rozklad do řetězového zlomků provedeme postupným dělením polynomů od nejvyšších i od nejnižších mocnin. Obdržíme dva různé rozklady, které jsou z hlediska výsledné impedance zcela ekvivalentní

$$Z(p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{p + \frac{1}{2p + \frac{3}{p}}} \quad , \quad (a) \quad Z(p) = \frac{3}{4p} + \frac{1}{\frac{8}{5p} + \frac{1}{\frac{5}{2}p + \frac{25}{4p}}} \quad (b) \quad (16.8)$$

Odpovídající příčkové články jsou uvedeny na **Obr. 143** mají evidentně nejen shodnou vstupní impedanci $Z(p)$, ale také stejný (minimální) počet obvodových prvků (2 indukory a 2 kapacity), takže z tohoto hlediska představují tzv. **kanonické tvary**. Dá se ukázat, že u

imitančních funkcí dvojpólů LC, RC i RL vede rozklad PRF do řetězového zlomku vždy na tyto tzv. **Cauerovy kanonické struktury** [6].



Obr. 143: Ekvivalentní obvody vzniklé rozkladem $Z(s)$ do řetězového zlomku.

16.2.7 Rozklad pozitivně reálné funkce na parciální zlomky

Druhý způsob rozkladu pozitivně reálné imitanční funkce vede na součet tzv. parciálních zlomků. Použít při tom můžeme metodu neurčitých koeficientů, známou z matematiky. Pochopitelně při respektování podmínek realizovatelnosti dílčích zlomků, i ty musí být dílčí PRF, aby se daly realizovat dílčími podobvody RLC. Při syntéze lze samozřejmě vycházet i z inverzní (admitanční) funkce. Při tomto druhu rozkladu můžeme využít i následující věty.

Věta 16.3 *Fosterova věta o rozkladu PRF.*

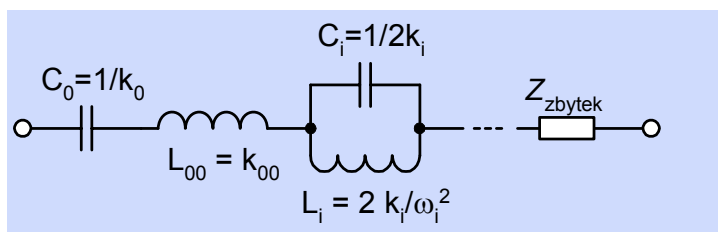
Impedanční funkci $Z(p)$, která je PRF lze rozložit do následujícího tvaru

$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \sum_{i=2}^n \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_i^2} + Z_{\text{zbytek}}(s) . \quad (16.9)$$

Jemu odpovídá zapojení na **Obr. 144**, nazývané Fosterova **kanonická struktura** [6]. Zbytková funkce Z_{zbytek} je často nulová. Není-li tomu tak, pokusíme se ji realizovat jiným způsobem. Parametry součástek a koeficienty k určíme z následujících vztahů:

$$\begin{aligned} k_0 &= \operatorname{Re} z [Z(s)]_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} [s Z(s)] \\ k_\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} [Z(s)/s] \\ k_i &= \operatorname{Re} z [Z(s)]_{s=\pm j\omega_i} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm j\omega_i} [(s \mp j\omega_i) Z(s)] = \frac{1}{2} \lim_{s^2 \rightarrow -\omega_i^2} \left[\frac{(s^2 + \omega_i^2) Z(s)}{s} \right] \end{aligned} \quad (16.10)$$

Pro rozloženou **impedanční funkci** $Z(p)$ odpovídá součtu dílčích PRF **sériové spojení** dílčích podobvodů. Při rozkladu **admitanční funkce** $Y(p)$ pak samozřejmě **paralelní spojení**. Pokud jsou dílčí imitanční funkce ještě příliš složité, lze je dále samostatně rozložit např. do řetězového zlomku, případně je možné tyto dva základní způsoby rozkladu podle potřeby kombinovat i jinými způsoby, které vedou k realizovatelným výsledkům. Jedním z nich je i Bruneho realizační cyklus, založený na postupném odštěpování nulových bodů a pólů [6].



Obr. 144: Zapojení obvodu odpovídající vztahu (16.9).

Příklad 16.8 *Syntéza obvodu rozkladem PRF na řetězový zlomek.*

Je dána stejná impedanční funkce $Z(s)$ (16.7), jako v předchozím příkladě. Proved'te syntézu obvodu rozkladem této PRF na parciální zlomky.

Řešení:

Impedanční funkci (16.7) nejprve upravíme (rozklad polynomů na kořenové činitele)

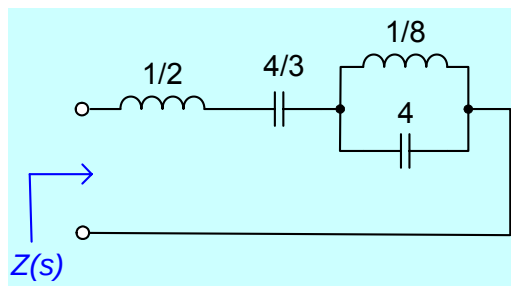
$$Z(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{2s^3 + 4s} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{2s(s^2 + 2)} . \quad (16.11)$$

Metodou neurčitých koeficientů provedeme rozklad $Z(s)$ (16.11) na parciální zlomky. Výsledek upravíme do následujícího tvaru

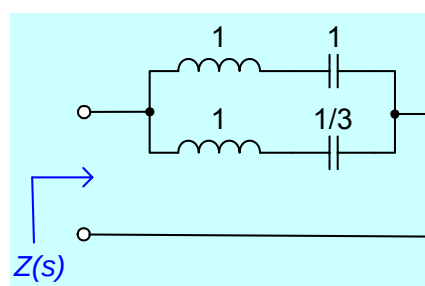
$$Z(s) = \frac{s^2 + \frac{3}{2}}{2s} + \frac{\frac{1}{4}s}{s^2 + 2} = \frac{1}{2}s + \frac{3}{4s} + \frac{1}{4s + \frac{8}{s}} . \quad (16.12)$$

Vztahu (16.12) odpovídá dvojpól LC na **Obr. 145a**.

Při syntéze lze samozřejmě vycházet i z inverzní admitanční funkce $Y(s)$. Výsledný dvojpól LC je na **Obr. 145b**. Obě struktury uvedené na **Obr. 145** mají stejný minimální počet součástek, jsou tedy kanonické (v literatuře se někdy nazývají Fosterovy kanonické struktury).



a)



b)

Obr. 145: Ekvivalentní obvody vzniklé rozkladem $Z(s)$ na parciální zlomky.

16.3 Kontrolní otázky z kapitoly 16

- 1) Vysvětlete co je to syntéza obvodů. Uveďte rozdíl mezi analýzou a syntézou. Nakreslete vývojový diagram.
- 2) Vysvětlete co je to návrh obvodů. Uveďte rozdíl mezi syntézou a návrhem. Nakreslete vývojový diagram.
- 3) Jaké vlastnosti má pozitivně reálná impedanční funkce?
- 4) Jak jsou rozloženy nulové body a póly obvodů: a) RC, b) RL, c) LC, d) RLC.
- 5) Vysvětlete způsob syntézy obvodů RLC rozkladem impedanční funkce na řetězový zlomek.
- 6) Vysvětlete způsob syntézy obvodů RLC rozkladem impedanční funkce na parciální zlomky.

17 Moderní analogové obvody

Cíle kapitoly: Seznámit se s principem činnosti moderních analogových obvodů, s obvody se spínanými kapacitami, s obvody v proudovém módu a s obvody se spínanými proudy.

17.1 Obvody se spínanými kapacitami

17.1.1 Vlastnosti obvodů se spínanými kapacitami

V současné době je stále více smíšených elektronických systémů, kde se vyskytují jak analogové, tak i digitální obvody. Pro jejich výrobu je žádoucí, aby u obou byla použita stejná technologie. U obvodů se spínanými kapacitami (SC) je to tato jednotná technologie použita CMOS. Operační zesilovače, pracovní kapacitami, spínače vše CMOS. Obvody SC jsou vhodné pro integrovanou formu až VLSI. V ní pracovní kapacitami mají hodnotu jen 1 – 10 pF. Komerčně dostupné integrované obvody (IO) jsou např.: Motorola 144114, AMI S 3506, MHF 4413 aj. Tyto obvody SC je možno konstruovat i jako hybridní IO, kde pracovní kapacitami mají větší hodnotu až 10 nF. Používají se jako filtry, A/D převodníky, Σ -A modulátory a jiné obvody. V obvodech SC jsou pouze kapacitami, aktivní bloky (nejčastěji OZ) a spínače. Rezistory a induktory jsou nahrazeny jejich SC ekvivalenty (R-SC a L-SC) nebo základním stavebním blokem jsou integrátory SC. Obvody SC jsou založeny na přenosu náboje. Pro jejich popis používáme nábojové rovnice psané v oblasti proměnné z, podobně jako obvody digitální. Na rozdíl od nich jsou v obvodech SC zpracovávány signály (vzorkované) diskrétní v čase, ale spojité v hodnotě. Na výstupu nejčastěji vyžadujeme opět signál analogový, proto tam je zařazen jednoduchý rekonstrukční filtr. Obecné blokové schéma obvodu SC je na Obr. 146. Pro činnost obvodů SC se většinou používá dvoufázové spínání. Budeme rozlišovat fázi sudou (S nebo E) a fázi lichou (L nebo O).

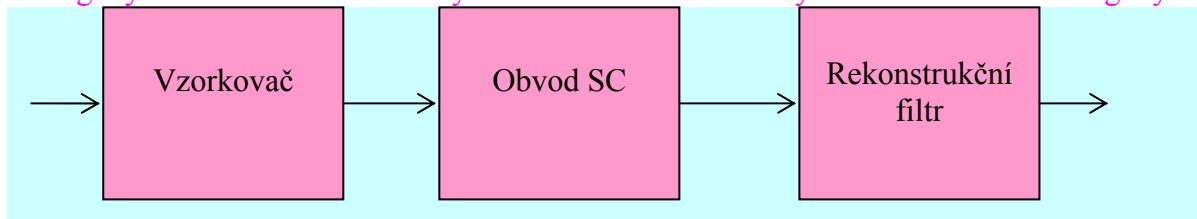
signál

analogový

vzorkovaný

vzorkovaný

analogový



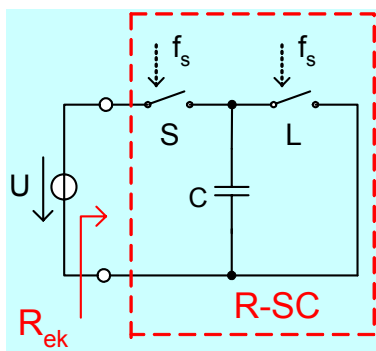
Obr. 146: Obecné blokové schéma obvodu SC.

Velkou předností je jejich vhodnost k miniaturizaci a k integraci. Srovnáme-li plochu klasického rezistoru (napájená uhlíková vrstva) a ekvivalentního R-SC, tak pro hodnotu odporu $R = 10 \text{ M}\Omega$ je potřeba plocha $10^6 \mu\text{m}^2$, kdežto ekvivalentní R-SC zabírá plochu jen $2,5 \cdot 10^3 \mu\text{m}^2$. Obvykle obvod SC realizuje přenosovou funkci (3.5) kde koeficienty jsou dány poměrem kapacit pracovních kapacitorů $a_i, b_i \approx \frac{C_n}{C_m}$. Pak i při běžné toleranci samotných

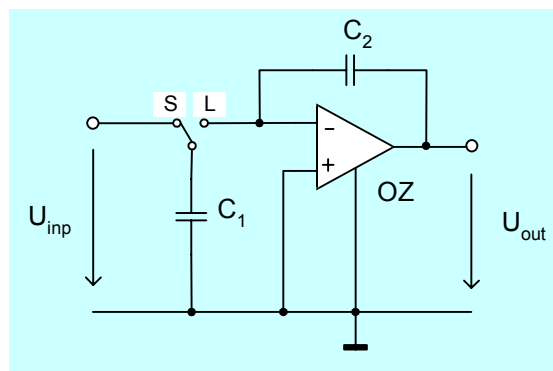
kapacit $\Delta C_n = 10\%$ je možné udržet přesnost poměru $\Delta \frac{C_n}{C_m} = 0,1\%$ a to díky integrované

formě a stejné technologii (se změnou teploty „ujíždí“ hodnoty všech C stejně). Takto se dosáhne minimálně stokrát větší přesnosti požadované přenosové funkce proti obvodům ARC. To je obrovská přednost obvodů SC. Na druhé straně jistou nevýhodou je požadavek přísně

lineárních a také i plovoucích (neuzemněných) pracovních kapacitorů. Na kapacitní čip v IO je pak vyžadována druhá vrstva polovodiče.



Obr. 147: Spínaný ekvivalent R-SC.



Obr. 148: Integrátor SC-FD.

17.1.2 Obvod SC simulující rezistor

Rezistor je charakterizován jako ztrátový prvek. Ztracená energie (W_z) je nepřímo úměrná hodnotě odporu R (17.1). V obvodech SC simulujeme ztrátový rezistor bezztrátovým kapacitorem C , dle principiálního zapojení na **Obr. 147**. V pracovní fázi **S** se kapacitor C nabije (v mžiku protože zde není žádný rezistor). V druhé fázi **L** se kapacitor C v mžiku vybije do zkratu. Energie se vyžáří. Na vstupní bráně v pracovní fázi obvod simuluje ztráty tedy rezistor. Získali jsme spínaný ekvivalent R-SC. Ztracená energie je zde přímo úměrná kapacitě C a nepřímo periodě spínání (17.1). Porovnáním vztahů (17.1) a (17.1) vyplývá, že hodnota simulovaného odporu je dána vztahem (17.1)

$$W_z \approx \frac{1}{R}, \quad (a) \quad W_z \approx f_s = \frac{1}{T}, \quad (b) \quad \Rightarrow \quad R_{EK} = \frac{T}{C}. \quad (c) \quad (17.1)$$

17.1.3 Integrátory SC

Ve známém zapojení integrátoru ARC s **OZ** nahradíme R ekvivalentem **R-SC** (**Obr. 147**), dostáváme zapojení integrátoru **SC** na **Obr. 148**. Obvod v sudé fázi realizuje **inverující** přenos s integračním charakterem a aproximující transformací $s \rightarrow z$ typu **FD** (forward difference)

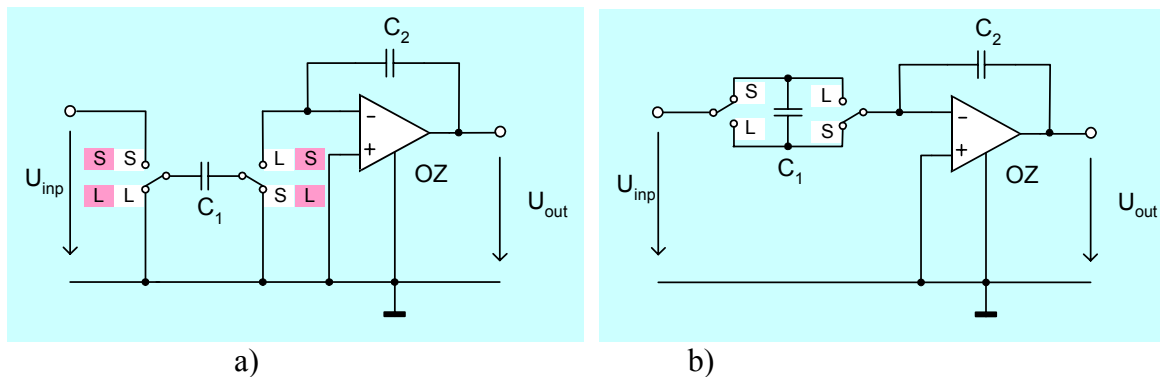
$$K = \frac{U_{out}^S}{U_{inp}^S} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z-1}. \quad (17.2)$$

Neinverující integrátor **SC-FD** dostaneme jednoduše (otáčením vrstev kapacitoru C_1 , vhodným spínáním) dle **Obr. 149a**. **Ztrátový integrátor SC-FD** dostaneme přidáním dalšího poobvodu **R-SC** paralelně k integračnímu kapacitou C_2 . Záměnou fází pravého přepínače (obr. 3b, červeně) dostaneme přenos v sudé fázi

$$K = \frac{U_{out}^S}{U_{inp}^S} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (17.3)$$

což odpovídá aproximující transformaci (backward difference) **BD**. Poznamenejme, že přenos mezi fázemi má u všech zapojení charakter transformace **LDI**

$$K = \frac{U_{out}^L}{U_{inp}^S} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z^{+1/2} - z^{-1/2}} \quad (17.4)$$



Obr. 149: Další typy integrátorů SC.

Velmi rozšířenou skupinou jsou **integrátory SC-BL** (bilineární) na **Obr. 149b** s přenosovou funkcí

$$K = \frac{U_{out}^S}{U_{inp}^S} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (17.5)$$

17.1.4 Složitější obvody SC

Jak víme z [3] dva integrátory ve smyčce vytvoří velmi využívaný filtr 2. řádu - bikvad. Tak můžeme z integrátorů SC, uvedených v předchozí kapitole získat bikvad SC. Pomocí bikvadů kaskádní syntézou pak sestojíme libovolný filtr SC vyšších řádů [3]. Integrátory SC však můžeme použít přímo jako stavební bloky, při syntéze vycházející ze stavového popisu prototypu obvodu RLC [3]. Při návrhu obvodů SC můžeme vyjít také ze struktur filtrů číslicových, které vhodně modifikujeme. Jsou známy realizace SC sčítaček, násobiček a časových zdrží. V současnosti je již druhá vlna aplikací a širokého použití obvodů SC. Blíže o obvodech SC viz. [17] a [21].

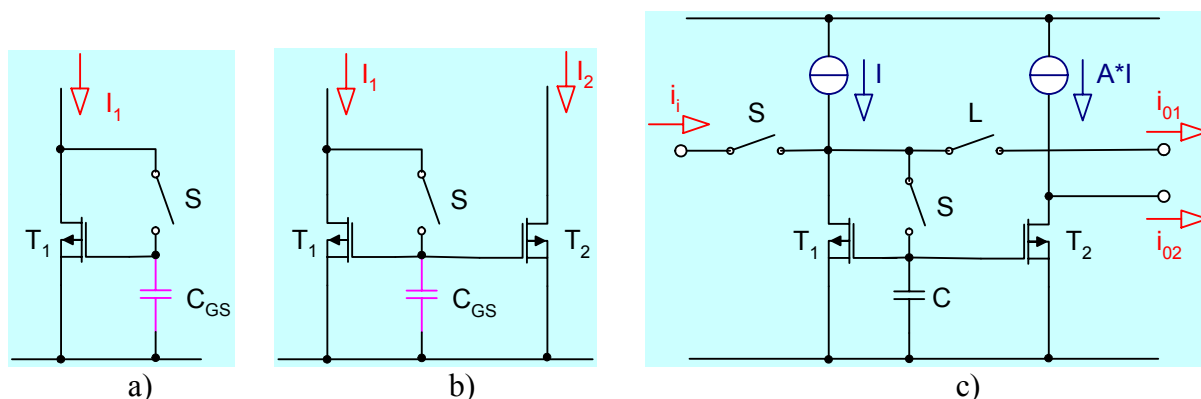
17.2 Obvody se spínanými proudy

17.2.1 Vlastnosti obvodů se spínanými proudy

V současné době je používáno stále více obvodů smíšených (analog-digital). proto se do popředí zájmu dostaly další moderní obvody se spínanými proudy (**SI**) [18]. Mají s digitálními obvody jednotnou a cenově dostupnou technologii a stejný způsob návrhu. Používají se jako moderní filtry, **A/D** převodníky, **Σ-Δ** modulátory a jiné obvody. Obvody **SI** jsou založeny na principu držení náboje a přenosu proudu (**SC** obvody na přenosu náboje). Nevyžadují lineární plovoucí kapacitory, jako je tomu u obvodů **SC**. Jako pracovní se využívají parazitní (nelineární) kapacity (**C_{GS}**). Obvody **SI** mají nižší napájecí DC napětí (**3,3 V**), jsou rychlejší, zpracovávají signály s vyššími frekvencemi. Na jejich realizaci se používá technologie **Bi CMOS, Ga As, 0,8 μm**.

17.2.2 Základní paměťový blok SI

Princip obvodů SI je patrný z **Obr. 150**. Elementární stavební blok SI je na **Obr. 150a**. Ve fázi (S) je spínač sepnut. Tak FET (T_1) se zkratovanými bránami G-D představuje diodu. Kapacitor C_{GS} (parazitní) se v této fázi (S) nabije na napětí U_{GS} . Ve druhé fázi (L) je spínač rozepnut C_{GS} drží náboj a napětí U_{GS} , proto i v této fázi (L) teče proud I_1 . Tranzistor drží proud I_1 z fáze (S) do druhé fáze (L). V zapojení na **Obr. 150b** je obvod doplněn proudovým zrcadlem (T_2), proud I_2 je zde obrazem I_1 . Dostáváme **proudovou časovou zdrž** o půl spínané periody. V [18] se tato proudová paměť nazývá časová zdrž $z^{-1/2}$ (half delay). Pak dvě zdrže $z^{-1/2}$ v kaskádě vytvoří požadovanou proudovou časovou zdrž o celou periodu z^{-1} (full delay).



Obr. 150: Základní paměťový blok SI

Na **Obr. 150c** je modifikovaná proudová časová zdrž $z^{-1/2}$ s proudovým předpětím, vytvářeným DC proudovými zdroji (nakresleny modře). Ve fázi (S) teče tranzistorem T_1 (se zkratovanými bránami G-D) proud $i_1 + I$. Kapacitor ($C \equiv C_{GS}$) se nabije na napětí, dané vztahem

$$U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{J+i}{k}}, \quad k = \frac{1}{2} \mu C \frac{W}{L}. \quad (17.6)$$

Ve fázi (L) tečou výstupní proudy

$$i_{o1} = -i, \quad i_{o2} = -Ai, \quad (17.7)$$

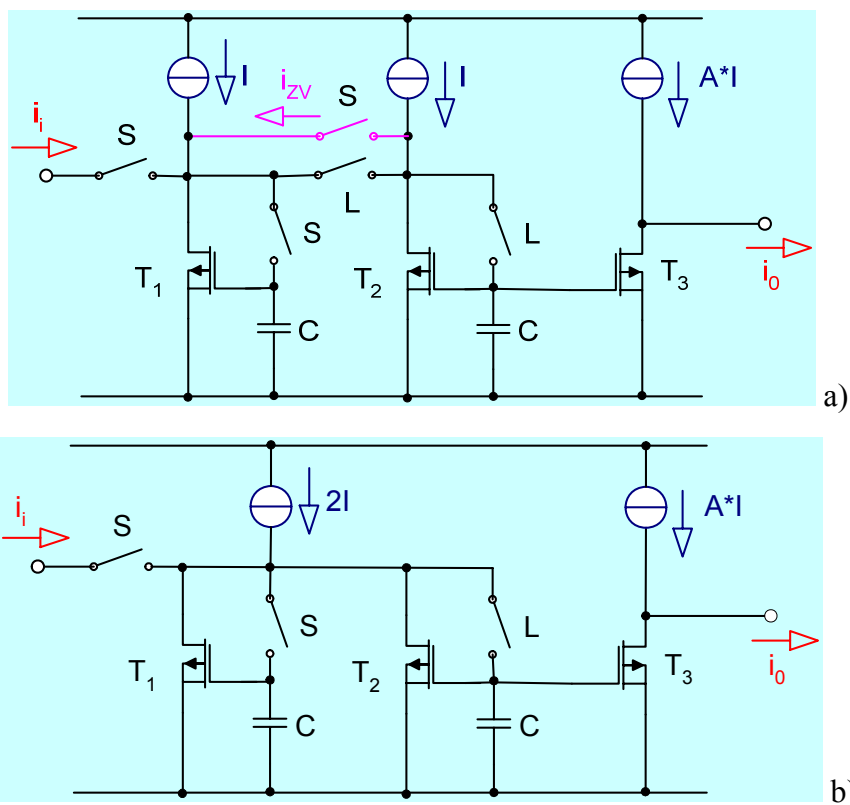
kde A je zesilovací činitel upravující měřítko výstupního proudu (scaling factor).

17.2.3 Integrátory SI

Neinvertující (bezeztrátový) integrátor SI dostaneme, doplníme-li proudovou časovou zdrž (**Obr. 150c**) zpětnou vazbou tak, jak je naznačeno na **Obr. 151a** (ZV je nakreslena červeně). Paralelně zapojené spínače S a L lze nahradit zkratem, čímž získáváme jednodušší výsledné zapojení na **Obr. 151b**. Přenos proudu v základní fázi (S) tohoto obvodu je dán vztahem

$$K(z) = \frac{i_{out}^S}{i_{inp}^S} = A \frac{1}{z-1}. \quad (17.8)$$

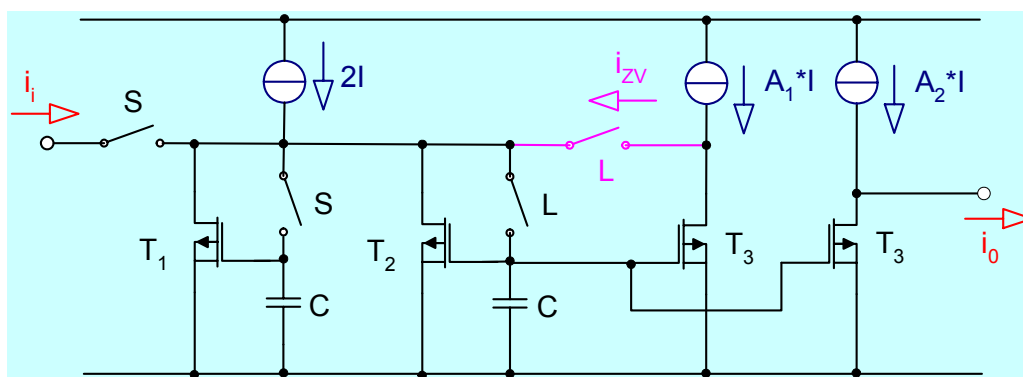
Z něj je patrné, že obvod v sudé fázi realizuje neinvertující přenos s integračním charakterem a aproximující transformací $s \rightarrow z$ typu FD (forward difference). V [18] jsou uvedena obdobná zapojení integrátorů SI, pracujících s transformací BD a BL.



Obr. 151: Neinverující (bezeztrátový) SI integrátor typu FD.

Tlumený (**ztrátový**) **neinvertující integrátor SI** dostaneme přidáním další ZV tak, jak je naznačeno červeně na **Obr. 152**. Simulovaná modulová charakteristika bezzeztrátového (a) a ztrátového (b) SI integrátoru je uvedena na .

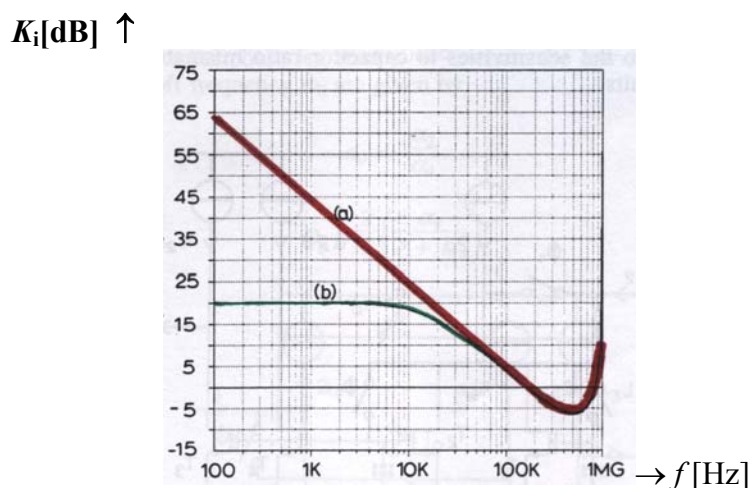
Obdobně můžeme navrhnout **invertující SI integrátor**. Podrobnosti najdete v knize [18]. Tam také najdete další základní spínané bloky, jako derivátor SI, analogovou násobičku SI (bez zpoždění) a jiné.



Obr. 152: Ztrátový SI integrátor typu FD.

17.2.4 Složitější obvody SI

Obdobně jako u obvodů SC (kap. 17.1), ze dvou integrátorů SI, zapojených ve smyčce, dostaneme **bikvad SI**. Pomocí bikvadů SI pak sestojíme libovolný filtr SI vyšších řádů. Ke konstrukci těchto filtrů můžeme modifikovaně použít veškeré poznatky z obvodů SC a také i filtrů číslicových.



Obr. 153: Modulová charakteristika integrátoru SI.

17.3 Obvody v proudovém módu

17.3.1 Různé druhy pracovních módů

Obvody pracující v **proudovém módu (CM)** nalézají stále širší uplatnění a to hlavně v aktivních filtrech pro oblast vyšších kmitočtů (řádově desítky MHz), realizovaných pak monolitickou integrovanou technologií. Klasické filtry RC se standardní strukturou operačního zesilovače (OZ) se zde použít nedají, jelikož to nedovolí vlastnosti dostupného reálného OZ a silně se zde projevují parazitní kapacity zpětnovazební struktury. Další předností obvodů CM je větší dynamika a možnost činnosti při velmi malých DC napájecích napětích ($\pm 2,5V$).

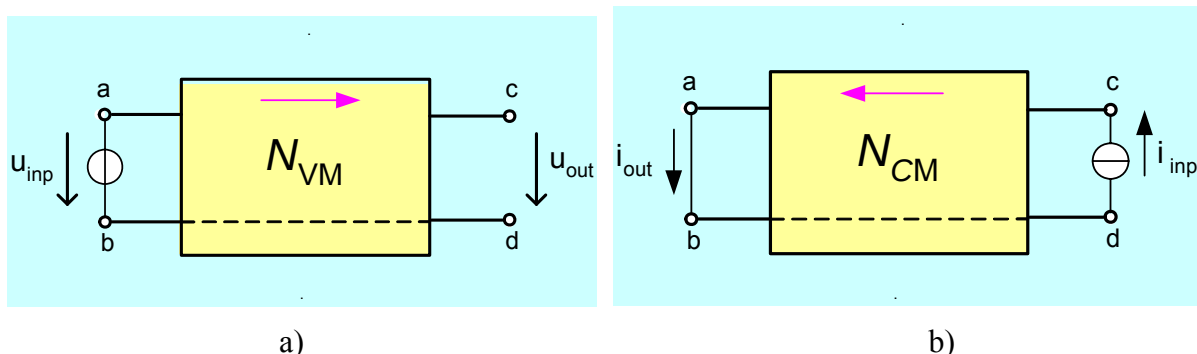
Při zpracování signálů v klasických obvodech, standardně využíváme napět'ové odezvy, kdy obvod pracuje v **napět'ovém módu (VM)**. V obvodech CM místo napět'ové odezvy, uvažujeme odezvu proudů. Hlavní charakteristikou těchto obvodů je nižší odporová úroveň všech uzlů v obvodu. To zajistí menší vliv parazitních kapacit, třebaže stejných hodnot (menší jsou zde odpovídající časové konstanty). V obvodech CM pak také můžeme použít i jiný vhodnější (proudový) aktivní prvek nebo funkční blok, s vyšším tranzitním kmitočtem. Moderní technologie přinesly celou řadu takovýchto stavebních bloků, převážně již v integrované monolitické formě nebo jako zákaznické hybridní obvody. Vhodným typem se ukázaly proudové konvejory, transimpedanční zesilovače (CFA), transadmitanční zesilovače (transkonduktory), proudové sledovače aj.

Nová zapojení v CM lze získat: 1) intuicí, zkusmo, 2) úpravou a modifikací již známých obvodů, 3) experimenty na počítači s využitím kontrolní symbolické analýzy nebo 4) známá zapojení z VM převést do CM transformací. Zvláště poslední způsob je výhodný, protože dovoluje využít bohatě rozpracovanou teorii a řadu ověřených obvodů, jak blíže rozebereme v následujícím odstavci.

Pracuje-li v CM jen část obvodu, nejčastěji aktivní funkční blok (např. konvektor), ale celkově obvod zpracovává signál napět'ový (v další části obvodu jsou uzlové impedance velmi vysoké úrovně), hovoříme pak o **smíšeném módu V/CM**. Obdobně může existovat v obvodu i duální smíšený mód C/VM.

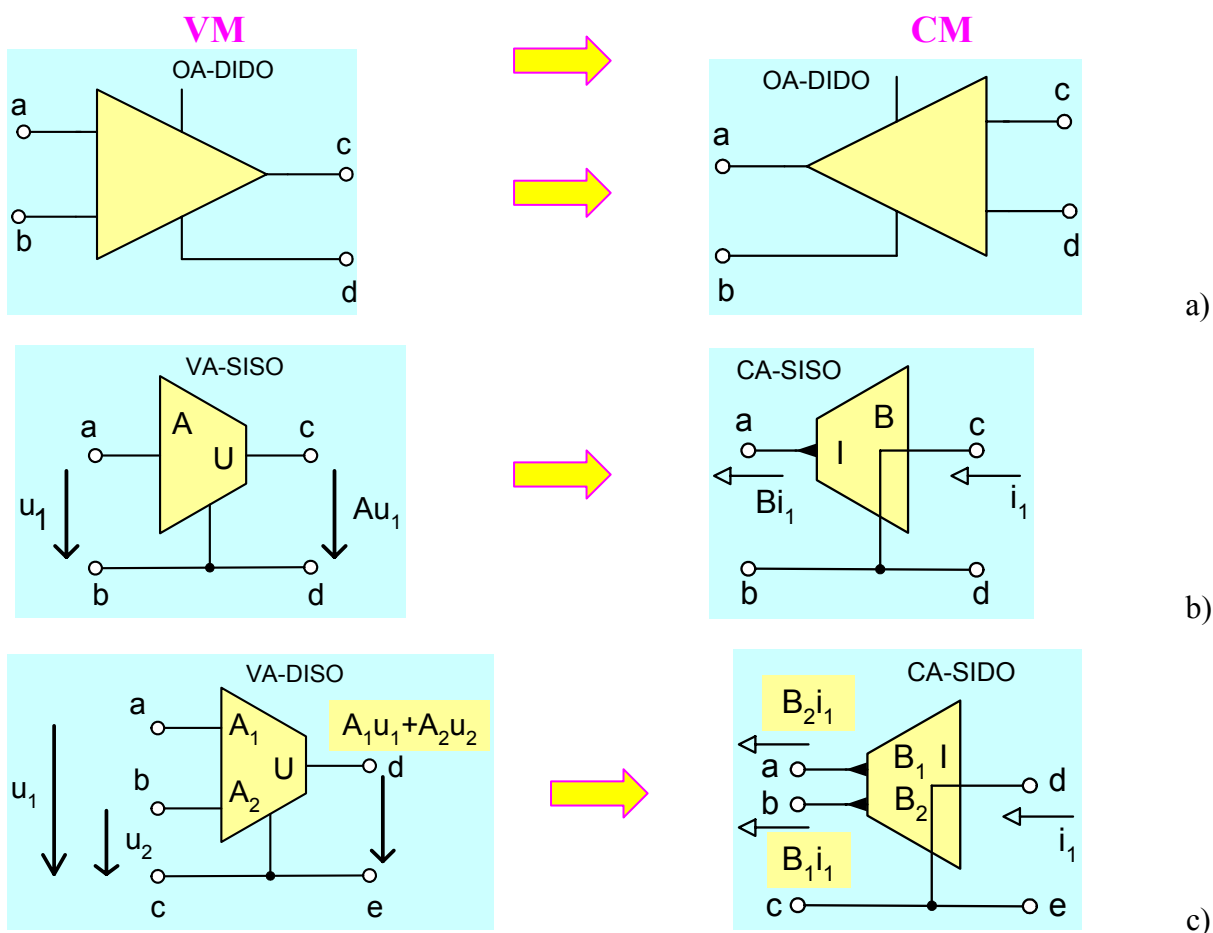
17.3.2 Přidružená transformace

Pro přímý a jednoznačný přechod mezi obvody VM a CM s výhodou použijeme **přidruženou transformaci**, kterou zavedl Toumazou [19] a postupně byla rozšířena i na obvody s moderními funkčními bloky.



Obr. 154: Přidružené obvody v napěťovém a proudovém módu.

Daný obvodový prototyp (N_{VM}), pracující ve VM (Obr. 154a), má jistý odpovídající přidružený obvod CM (N_{CM}) (Obr. 154b), který má proudovou přenosovou funkci $K_I = I_{out}/I_{in}$ stejnou, jako byla napěťová u prototypu $K_V = V_{out}/V_{in}$ a naopak. Je zřejmé, že se stejnými přenosovými funkcemi zůstávají stejné i jejich citlivosti na změny parametrů obvodových prvků.

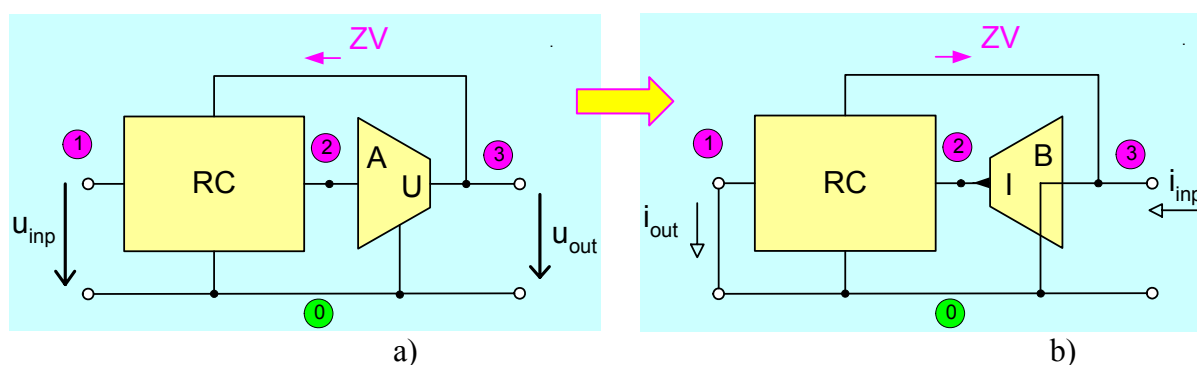


Obr. 155: Přidružené aktivní funkční bloky.

Aktivní prvky a funkční bloky v prototypu N_{VM} nahradíme jim přidruženými prvky dle Obr. 155. Přidruženým ekvivalentem operačního zesilovače je opět operační zesilovač u

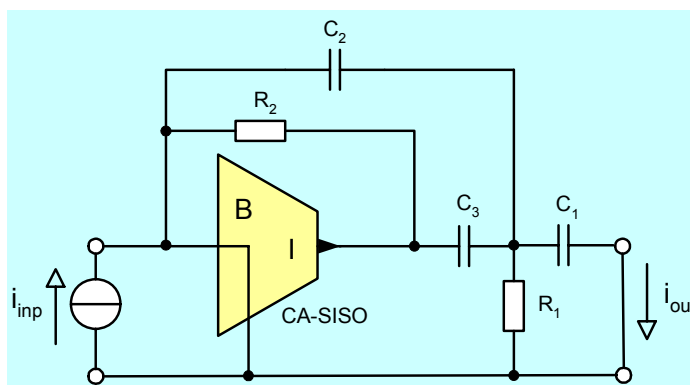
něhož zaměníme jen vstup a výstup (záměna nulátoru norátorem). Zřejmá je záměna ideálního proudového zesilovače (CA) (CCCS s parametrem B) za ideální napěťový zesilovač (VA) (VCVS) s parametrem A . Parametry A a B mají stejnou hodnotu. Sumační napěťový zesilovač se nahradí proudovým zesilovačem s rozbočením proudu. Parametry A_i a B_i mají opět stejné hodnoty.

Obvod N_{CM} získáme z prototypu N_{VM} tak, že zaměníme buzení z napěťového (u_{inp}) na proudové (i_{inp}) a zároveň zaměníme vstupní (a, b) a výstupní (c, d) bránu. To znamená budící napěťový zdroj u_{inp} nahradíme zkratem, přes který pak v N_{CM} teče výstupní proud i_{out} , který je odezvou na i_{inp} . Budící proudový zdroj i_{inp} připojíme na původně výstupní bránu (c, d) prototypu N_{VM} . **Pasivní prvky** (R, L, C) tvoří podobvod, který se z N_{VM} do N_{CM} převádí beze změny.



Obr. 156: Transformace struktury bikvadu ARC.

Transformace struktury velmi často používaného bikvadu ARC [3] s jedním aktivním funkčním blokem (SAB) z VM do CM je na **Obr. 156**. Zapojení pasivního trojpólu RC zůstává beze změny. Napěťový zesilovač je nahrazen proudovým. Příklad takto získané horní propusti SAB s proudovým zesilovačem, pracující v CM je na **Obr. 157**.



Obr. 157: Aktivní horní propust RC 2. řádu v proudovém módu.

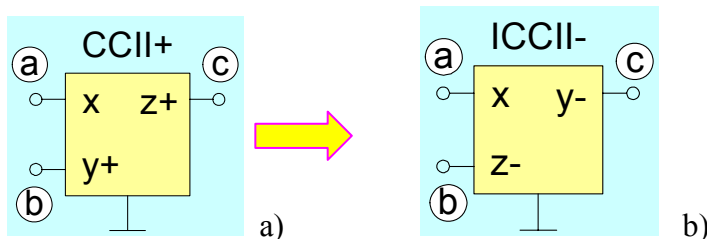
17.3.3 Obvody s proudovými konvejory

Jedním s velmi výhodných funkčních bloků pro CM jsou **proudové konvejory**. Jsou to moderní funkční mnohobrany, s různě definovanými vztahy mezi branovými veličinami. Konvejováním rozumíme sledování u a i , popřípadě jejich sledování s inverzí. Konvejory mají lepší kmitočtové vlastnosti než standardní OZ, proto se s výhodou používají ve vyšších kmitočtových pásmech.

Klasický **tříbranový konvektor CCII+** na **Obr. 158a** je definován následovně

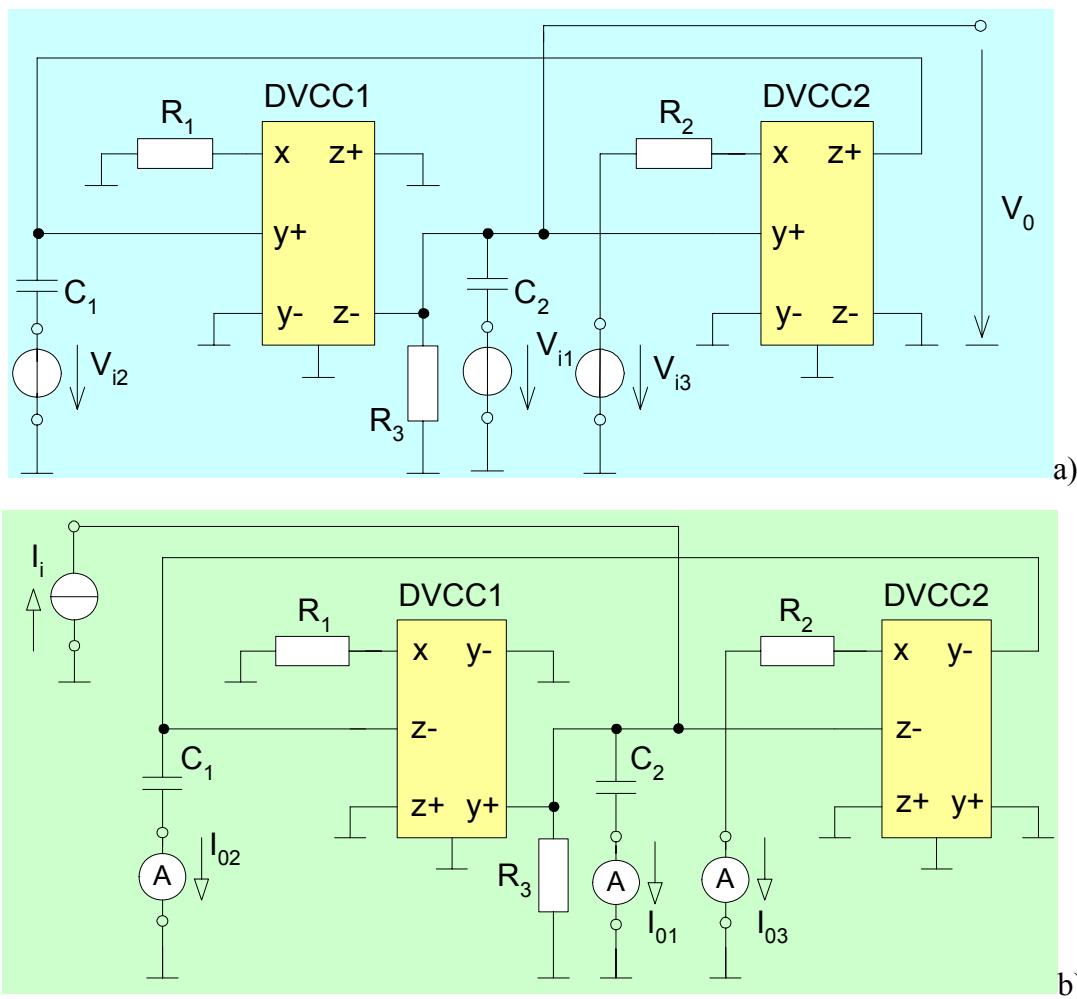
$$u_x = u_y, \quad i_y = 0, \quad i_z = i_x. \quad (17.9)$$

I u konvektorů byla objevena vzájemná přidruženost [20]. Tak například jednoduchý konvektor **CC II+**, při transformaci určitého obvodu z **VM** do **CM**, nahradíme inverzním typem **ICC II-**, při čemž zaměníme brány **x** a **y**, tak jak je uvedené na **Obr. 158**.

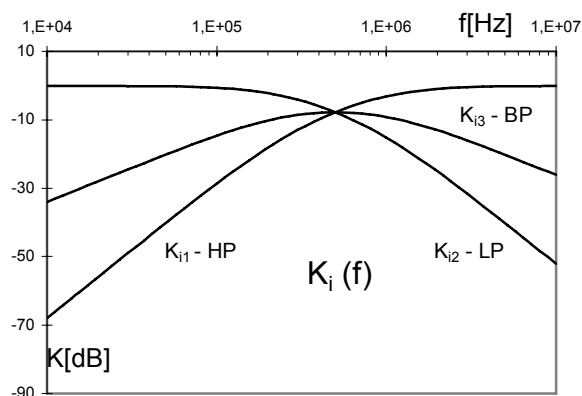


Obr. 158: Tříbranový konvektor CC II+ a jemu přidružený blok ICC II-v proudovém módu.

Pětibranový proudový konvektor s diferenčním napětovým vstupem a vyváženým proudovým výstupem (**DVCC**) je moderní, velmi vhodný, vícebranový funkční blok pro **ARC** filtry, pracující ve vyšších kmitočtových pásmech a v proudovém módu. Bikvadr se dvěma **DVCC** na **Obr. 159** dovoluje realizovat současně **DP**, **PP**, **HP**, tedy univerzální vícefunkční filtr 2. řádu, u kterého je možno navíc nezávisle nastavit **Q** a mezní kmitočet f_0 . Na **Obr. 159a** je tento filtr ve **VM** a na **Obr. 159b** je přidruženou transformací převeden do **CM**. Modulové charakteristiky, simulované ve PSpice, jsou na **Obr. 160**. Jasně potvrdily záměr syntézy.



Obr. 159: Vícefunkční filtr 2. řádu s DVCC v napětovém a proudovém módu.



Obr. 160: Modulové charakteristiky univerzálního filtru v proudovém módu.

17.3.4 Proudové integrátory

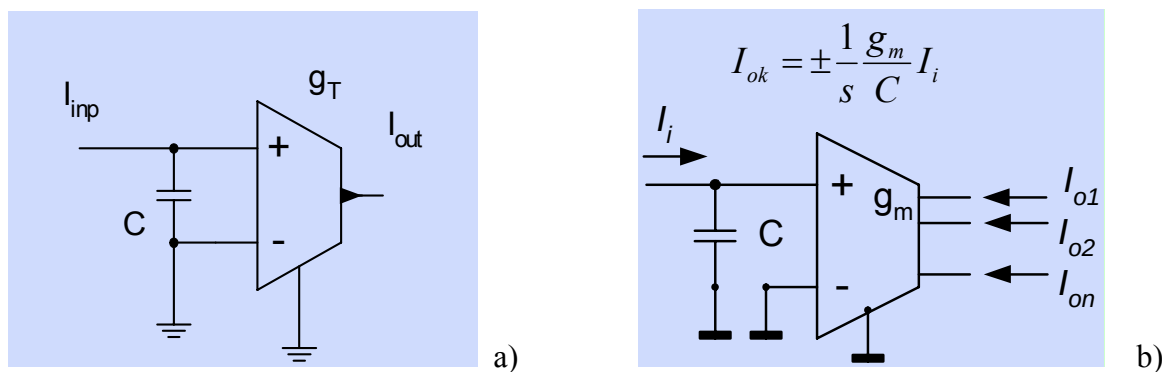
Základním stavebním blokem obvodů v **CM** je **proudový integrátor** s přenosem

$$K_i = \frac{I_{out}}{I_{inp}} = \frac{I}{s} K \quad (17.10)$$

Ten je možno realizovat různými aktivními prvky. Příklad realizace s **transkonduktorem** je na **Obr. 161**. V principu je zde využito, že napětí na kapacitoru je dáno integrací jeho proudu. Transkonduktor pracuje jako převodník **U→I**. Takže přenos proudu je dán vztahem

$$K_i = \frac{I_{out}}{I_{inp}} = \frac{I}{s} \frac{g_T}{C} \quad (17.11)$$

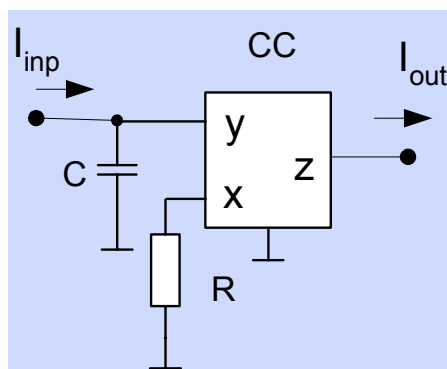
Na **Obr. 161b** je proudový integrátor s více výstupy (proudový distributor). Výhodou těchto zapojení s transkonduktory je možnost elektronického přeladování (změnou **g_m**).



Obr. 161: Proudový integrátor s transkonduktorem.

Proudový integrátor realizovaný s **proudovým konvejem** (klasickým tříbranovým **CC II**) je na **Obr. 162**. V tomto případě potřebujeme navíc rezistor, což je nevýhoda. Přenos je dán vztahem

$$K_i = \frac{I_{out}}{I_{inp}} = \frac{I}{sRC} \quad (17.12)$$



Obr. 162: Proudový integrátor s konvejorem CC II..

17.3.5 Univerzální vícefunkční filtry v proudovém módu

Tyto filtry realizují libovolnou přenosovou funkci vyšších řádů (3.5) v proudovém módu. Jejich základem jsou struktury s integrátory a více smyčkami zpětné vazby [3] v proudovém módu. Použít můžeme dvě základní kanonické struktury: 1) **FLF** (follow the leader feedback), 2) **IFLF** (inverse follow the leader feedback). Z nichž každá může mít dvě modifikace: a) s distribucí signálu na vstupu – **ID** (input distribution) nebo b) se sumací signálu na výstupu – **OS** (output summation).

K realizaci těchto struktur potřebujeme následující bloky: 1) proudové integrátory, 2) proudové distributory (rozdělovače) = proudové zrcadla, 3) proudové sumátory = jen pouhý uzel (velká výhoda CM!!). Příklad realizace vícefunkčního filtru 3-tího řádu v proudovém módu **FLF-OS** s **OTA-C** je na **Obr. 78**. Podle toho které cesty do výstupního uzlu zrušíme (zařadíme do nich spínače), obdržíme žádaný typ filtru (**DP, HP, PP, APF**). Obvod jsme blíže popsali v kap. 10.5.

17.4 Kontrolní otázky z kapitoly 17

- 1) Vysvětlete princip a uveďte vlastnosti obvodů v proudovém módu (CM). Uveďte základní stavební bloky CM. Nakreslete proudový integrátor. Jak vytvoříme složitější obvody CM?
- 2) Vysvětlete princip a uveďte vlastnosti obvodů se spínanými kapacitami (SC). Nakreslete základní stavební blok SC - integrátor se spínanými kapacitami. Jak vytvoříme složitější obvody SC?
- 3) Vysvětlete princip obvodů se spínanými proudy (SI). Nakreslete základní stavební bloky SI. Jak vytvoříme složitější obvody SI?

Seznam použité literatury

- [1] Dostál, T. - Pospíšil, J.: Teorie elektronických obvodů, Skripta FEI VUT v Brně, VUTIUM, Brno, 2000.
- [2] Dostál, T.: Analogové elektronické obvody. Elektronická skripta FEKT VUT v Brně, 2004.
- [3] Dostál, T.: Elektrické filtry. Elektronická skripta FEKT VUT v Brně, 2004.
- [4] Kouřil, F. - Vrba, K.: Nonlinear and parametric circuits. John Wiley, New York, 1988, resp. Teorie nelineárních a parametrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha, 1982.
- [5] Čajka, J. - Kvasil, J.: Teorie lineárních obvodů. SNTL/ALFA, Praha, 1979.
- [6] Čajka, J. - Kvasil, J.: Úvod do syntézy lineárních obvodů. SNTL/ALFA, Praha, 1981.
- [7] Brančík, L.: Elektrotechnika I. Elektronická skripta FEKT VUT v Brně, 2004.
- [8] Sedláček, J. - Valsa, J.: Elektrotechnika II. Elektronická skripta FEKT VUT v Brně, 2004.
- [9] Desoer, CH.A. - Kuh, E.S.: Basic circuit theory. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [10] Chen W. K.: The circuits and filters hand book. Florida, CRC Press, 2000.
- [11] Trunkátová, J.: Elektronické prvky. Skripta FEI VUT v Brně, PC-DIR, Brno, 1993.
- [12] Stránský, J. a kol.: Polovodičová technika I / II. SNTL/ALFA, Praha, 1973/1975.
- [13] Tietze, U. - Schenk, Ch.: Electronic circuits. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [14] Vlach, J.: Basic Network Theory with Computer Applications. Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.
- [15] Vlach, J.- Singhal, K.: Computer methods for circuit analysis and design. Van Nostrand Reinhold, New York, 1994.
- [16] Kolka, Z.: Počítačové řešení elektronických obvodů. Elektronická skripta FEKT VUT v Brně, 2004.
- [17] Allen P.E. - Sanchez S. E.: Switched capacitor circuits. Van Nostrand, New York, 1984.
- [18] Toumazou, C. - Lidgey, F. J. - Haigh, D. G.: Analogue IC design - The current-mode approach. Peter Peregrinus Ltd., London, 1990.
- [19] Toumazou, C. - Hughes, J. B. - Battersby, N. C.: Switched-current an analogue technique for digital technology. Peter Peregrinus Ltd., London, 1993.
- [20] Dostál, T. - Čajka, J. - Vrba, K.: Transformace umožňující získat přidružené obvody v proudovém módu. Internetový časopis Elektrevue, č. 23, 2000, [http: www. elektrevue.cz](http://www.elektrevue.cz).
- [21] Dostál, T.: Analýza a syntéza obvodů se spínanými kapacitami. Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT, svazek A-37, VUT Brno, 1987.